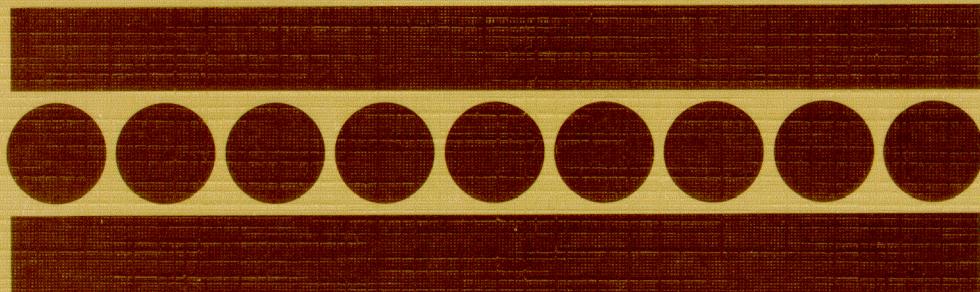


NAZIOARTEKO ESTATISTIKA
MINTEGIA EUSKADIN

1985

SEMINARIO INTERNACIONAL
DE ESTADISTICA EN EUSKADI



**DENBORAZKO SERIEEN AZTERKETA:
INDIZE ESTATISTIKOAK**

**ANALISIS DE SERIES CRONOLOGICAS:
LOS INDICES ESTADISTICOS**

**ANALYSE DES SERIES CHRONOLOGIQUES:
LES INDICES STATISTIQUES**

**ANALYSIS OF CHRONOLOGICAL SERIES:
THE STATISTICAL INDICES**

J. FOURASTIE



NAZIOARTEKO ESTATISTIKA
MINTEGIA EUSKADIN

1985

SEMINARIO INTERNACIONAL
DE ESTADISTICA EN EUSKADI

**DENBORAZKO SERIEEN AZTERKETA:
INDIZE ESTATISTIKOAK**

**ANALISIS DE SERIES CRONOLOGICAS:
LOS INDICES ESTADISTICOS**

**ANALYSE DES SERIES CHRONOLOGIQUES:
LES INDICES STATISTIQUES**

**ANALYSIS OF CHRONOLOGICAL SERIES:
THE STATISTICAL INDICES**

J. FOURASTIE

CUADERNO 8 KOADERNOA

EUSKO JAURLARITZA
Estatística Zuzendaritza



GOBIERNO VASCO
Dirección de Estadística

© **Eusko Jaurlaritza - Gobierno Vasco**

Depósito Legal: S. S. 281-86

ISBN: 84-7542-127-10. Obra Completa.

ISBN: 84-7542-289-6. Tomo VIII.

Impreso en Itxaropena, S.A. - Errikobarra kalea, 2 - Zarautz.

AURKEZPENA

Estatistikako Mintegi Internazionalak sustatzean, hainbat xederekin bete nahi luke Eusko Jaurlaritzaren Estatistika Zuzendaritzak, hala nola:

- Unibertsitatearekiko eta, Estatistika Sailarekiko lankidetza bultzatu.
- Funtzionarioi, irakasle, ikasle eta estatistikaren alorrean interesaturik leudekeen guztien birziklapen profesionala erraztu.
- Estatistikako alorrean eta mundu-mailan irakasle prestu eta abangoardiako ikerlari diren pertsonaiak Euskadira ekarri, guzti horrek zuzeneko harremanei eta esperientzien ezagupenei dagokienez suposatzen duen ondorio positiboarekin.

Iharduketa osagarri bezala eta interesaturik leudekeen ahalik eta pertsona eta Erakunde gehienetara iristearren, Ikastaro hauetako txostenen argitaratzea erabaki da, beti ere txostenemailearen jatorrizko hizkuntza errespetatuz, horrela gure Herrian gai honi buruzko ezagutza zabaltzen laguntzeko asmoarekin.

PRESENTACION

Al promover los Seminarios Internacionales de Estadística, la Dirección de Estadística del Gobierno Vasco pretende cubrir varios objetivos:

- Fomentar la colaboración con la Universidad y en especial con los Departamentos de Estadística.
- Facilitar el reciclaje profesional de funcionarios, profesores, alumnos y cuantos puedan estar interesados en el campo estadístico.
- Traer a Euskadi a ilustres profesores e investigadores de vanguardia en materia estadística, a nivel mundial, con el consiguiente efecto positivo en cuanto a la relación directa y conocimiento de experiencias.

Como actuación complementaria y para llegar al mayor número posible de personas e Instituciones interesadas, se ha decidido publicar las ponencias de estos Cursos, respetando en todo caso la lengua original del ponente, para contribuir así a acrecentar el conocimiento sobre esta materia en nuestro País.

PRESENTATION

La Direction de la Statistique du Gouvernement Basque se propose d'atteindre plusieurs objectifs par la promotion des Séminaires Internationaux de la Statistique:

- Encourager la collaboration avec l'Université et spécialement avec les départements de la statistique.
- Faciliter le recyclage professionnel des fonctionnaires, professeurs, élèves, et tous ceux qui pourraient être intéressés par la statistique.
- Inviter en Euskadi des professeurs mondialement renommés et des chercheurs de premier ordre en matière de Statistique avec tout ce que cela pourrait entraîner comme avantage dans les rapports et l'échange d'expériences.

En outre, il a été décidé de publier les exposés de ces rencontres afin d'atteindre le plus grand nombre de personnes et d'institutions intéressées, et pour contribuer ainsi à développer dans notre pays les connaissances sur cette matière. Dans chaque cas la langue d'origine du conférencier sera respectée.

PRESENTATION

In promoting the International Seminars on Statistics, the Statistics Office of the Basque Government is attempting to achieve a number of objectives:

- Encourage joint working with the Basque University and, in particular, with its Department of Statistics.
- Facilitate the in-training of civil servants, teachers and students and of all those interested in the field on statistics.
- Bring to Euskadi distinguished academics and researchers in the front line of statistics work, at a world-wide level, with all the benefits that this will bring through direct contacts and the interchange of experiences and ideas.

As an additional step, it has been decided to publish in advance the papers to be presented at these courses, respecting the native language of the speaker, in each case. This is in order that as many interested people and institutions as possible are made aware. In this way we hope to contribute to the growth and awareness concerning this topic in our country.

Vitoria-Gasteiz, Mayo 1986-ko Maiatza

JOSE IGNACIO GARCIA RAMOS
Estatistikako Zuzendaria
Director de Estadística

SARRERA

Liburu honek Eusko Jaurlaritzaren Estatistika-Zuzendaritzak eta Euskal Herriko Unibertsitateak antolaturik, J. Fourastié Andreak Euskadiko Estatistikako III Nazioarteko Mintegiaren barruan "Séries Chronologiques: Indices Statistiques" gaiari buruz eman duen ikastaroa laburbiltzen digu. III Mintegi honek kontatzen du baita Madrileko J.L. Sánchez-Crespo, I.A.S.S. ko Lehendakarioordearen "Curso básico intensivo de muestreo" gaiarekin eta G. Roy, Frantziako I.N.S.E.E. ko Administratariaren, "Echantillon-Maître des Ménages: Conception et Implications" kurtso batekin.

INTRODUCCION

Este libro resume el curso que sobre "Series Chronologiques: Indices Statistiques" ha impartido J. Fourastié dentro del III Seminario Internacional de Estadística en Euskadi, organizado por la Dirección de Estadística del Gobierno Vasco y la Universidad del País Vasco. Este III Seminario cuenta con la participación de J.L. Sánchez-Crespo, Vicepresidente del IASS, Madrid, con el tema "Curso básico intensivo de muestreo" y G. Roy, Administrador del INSEE, Francia, con un curso sobre "Echantillon-Maître de Ménages: Conception et Implications".

INTRODUCTION

Ce livre résume le cours présenté par J. Fourastié sur "Séries Chronologiques: Indices Statistiques" dans le cadre du III Séminaire International de la Statistique d'Euskadi, organisé par la Direction de la Statistique du Gouvernement Basque et l'Université du Pays Basque. Ce III Séminaire compte aussi avec la participation de J.L. Sánchez-Crespo, Vice-président du IASS, Madrid, avec le sujet "Curso básico intensivo de muestreo" et G. Roy, Administrateur de l'INSEE, France, avec un cours sur "Echantillon-Maître des Ménages: Conception et Implications".

INTRODUCTION

This book summarises the course on «Séries Chronologiques: Indices Statistiques» given by J. Fourastié in the III International Seminar on Statistics held in Euskadi, organised by the Statistics Office of the Basque Government and by the University of the Basque Country. This III Seminar includes also the participation of J.L. Sánchez-Crespo, Vice-president of the IASS, Madrid, with a lecturer on "Curso básico intensivo de muestreo" and of G. Roy, Administrateur de l'INSEE, France, with a course on "Echantillon-Maître de Ménages: Conception et Implications".

BIOGRAFIA

Jacqueline Fourastie, 1937 an Frantzian jaio zen. Matematiketan agregatua eta Zientzietan doktorea da. Bigarren mailako hezkuntzaun urte batzu igaro eta gero, Ministère de l'Education Nationalen Estatistikako serbitzu batean egon zen. 1965 tik Parisko "Conservatoire National des Arts et Métiers" en (soldatapeko helduentzat destinatutako Unibertsital zentroa) Matematikak eta Estatistika irakasten die ekonomikalariei. Baita ere "Services des Concours du Secretariat General à l'Enseignement Catholique" en arduraduna da. Liburu eta ikerketa artikulu batzu idatzi ditu: Adibidez "Les formules d'indices de prix" (1966ean) "Essai sur la Mesure des quantités économiques" (1973 ean) eta Jean Fourastiéren laguntzaiile bezala "Pouvoir d'achat, prix et salaires" (1976 ean), "La réalité économique" (1977 ean). Baita ere, barkerrik edo laguntzaile bezala hamabosten bat eskola edo unibertsitate liburu idatzi ditu. Azkenekoa "Les indices statistiques" (1984 ean B. Graisen laguntzarekin). Orain "Conservatoire National des Arts et Métiers"ko laborategian arduradun ordeko da.

Jacqueline Fourastie, nacida en Francia en el año 1937, es agregada en matemáticas y doctor en ciencias. Después de algunos años en la enseñanza secundaria pasa a formar parte de un servicio de Estadística del Ministerio de Educación Nacional. Desde 1963 da clases de Matemáticas y Estadística a los economistas del Conservatoire National des Arts et Métiers (centro universitario destinado a adultos asalariados). Paralelamente es responsable de "Services de Concours du Secretariat General à l'Enseignement Catholique". Ha escrito un cierto número de obras y artículos de investigación: "Les formules d'indices de prix" (1966), "Essai sur la Mesure des quantités économiques" (1973) y como colaboradora de Jean Fourastié "Pouvoir d'achat, prix et salaires" (1976), "La réalité économique" (1977). Asimismo ha escrito, sola o en colaboración, unos quince manuales escolares y universitarios, el último de ellos es "Les indices statistiques", (con la colaboración, de B. Grais, 1984). En la actualidad es Subdirectora de Laboratorio en el Conservatoire National des arts et Métiers.

Jacqueline Fourastie, née en France en 1937, est agrégée de mathématiques et docteur ès-sciences. Après quelques années dans l'enseignement secondaire, elle a fait partie d'un service de Statistique du Ministère de l'Education Nationale. Depuis 1965, elle enseigne des Mathématiques et les Statistiques aux économistes du Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris (établissement universitaire destiné aux adultes salariés). Parallèlement, elle est responsable du Service des Concours du Secrétariat Général à l'Enseignement Catholique. Elle a écrit un certain nombre d'ouvrages et articles de recherche dont: "Les formules d'indices de prix" (1966), "Essai sur la Mesure des quantités économiques" (1973), et comme collaboratrice de Jean Fourastié: "Pouvoir d'achat, prix et salaires" (1976), "La réalité économique" (1977). Elle a également écrit, seule ou en collaboration, une quinzaine de manuels scolaires ou universitaires dont le dernier est: "Les indices statistiques" (avec la collaboration de B. Grais, 1984). Actuellement elle est sous-directrice de Laboratoire au Conservatoire National des arts et Métiers.

Jacqueline Fourastie, was born in France in 1937. She is agrégée in mathematics and she is Doctor Sciences too. After some years as teacher in the secondary education she began to work in a Statistical Service for the Ministère de l'Education Nationale. Since 1963 she teaches Mathematics and Statistics to the economists of the Conservatoire National des Arts et Métiers (university center for wage-earner people). She answer of "Services de Concours du Secrétariat General à l'Enseignement Catholique", too. She has written several books and articles on researching, "Les Formules d'indices de prix" (1966), "Essai sur la Mesure des quantités économiques" (1973) and as collaborator of Jean Fourastié she has written "Pouvoir d'achat, prix et salaires" (1976), "La réalité économique" (1977). She has also written, alone or as collaborator, fifteen school and university handbooks, the last one is "Les indices statistiques", (with the collaboration of B. Grain, 1984). At present she is assistant director at the laboratory of the Conservatoire National des Arts et Métiers.



AURKIBIDEA INDICE

Aurkezpena/Presentación/Présentation

Presentation	5
Sarrera/Introducción/Introduction	
Introduction	7
Biografía	9
Laburpena	13
I. Généralités sur les séries chronologiques	15
1. Representation graphique des séries chronologiques	18
A. Graphique arithmétique	18
B. Graphique semi-logarithmique	19
2. Traitement statistique des séries à caractère saisonnier	23
A. Définition	23
B. Un procédé insuffisant	24
C. Méthode des moyennes mobiles	24
D. Les coefficients saisonniers	27
3. Prévisions à court terme	29
A. Principe	29
B. Correction des variations saisonniers et extrapolation de la tendance	29
C. Autres méthodes	30
D. Conclusions sur les méthodes de prévision	31
II. Théorie des indices statistiques	32
1. Qu'est-ce qu'un indice?	32
2. Les indices simples	32
A. Comparaison de grandeurs dans le temps	32
B. Comparaisons dans l'espace	34
C. Propriétés des indices simples	34
3. Notion d'indice synthétique	36
4. Les indices: moyennes simples	37
A. La moyenne Arithmétique	37
B. La moyenne harmonique	39
C. La moyenne géométrique	40
D. Relations entre les trois moyennes	42

I. Generalidades sobre las series cronológicas	83
1. Representación gráfica de las series cronológicas	86
A. Gráfico aritmético	86
B. Gráfico semi-logarítmico	87
2. Tratamiento estadístico de las series con carácter estacional	91
A. Definición	91
B. Un procedimiento insuficiente	92
C. Método de las medias móviles	92
D. Los coeficientes estacionales	95
3. Previsiones a corto plazo	97
A. Principio	97
B. Corrección de las variaciones estacionales y extrapolación de la tendencia	97
C. Otros métodos	99
D. Conclusiones sobre los métodos de previsión	99
II. Teoría de los índices estadísticos	100
1. ¿Qué es un índice?	100
2. Los índices simples	100
A. Comparación de magnitudes en el tiempo	100
B. Comparaciones en el espacio	102
C. Propiedades de los índices simples	102
3. Noción de índice sintético	104
4. Los índices: medias simples	105
A. La media aritmética	105
B. La media armónica	107
C. La media geométrica	108
D. Relaciones entre estas tres medias	109

4. Indices de Laspeyres et de Paasche	42	4. Indices de Laspeyres y de Paasche	110
A. Définition	42	A. Definición	110
B. Avantages des indices de Laspeyres et de Paasche	45	B. Ventajas de los índices de Laspeyres y de Paasche	112
C. Inconvénients des formules de Laspeyres et de Paasche	46	C. Inconvenientes de las fórmulas de Laspeyres y de Paasche	114
D. Relations entre les indices de Laspeyres et de Paasche	47	D. Relaciones entre los índices de Laspeyres y de Paasche	115
5. Changements d'origine. Raccordements d'indices	48	5. Cambios de origen. Empalmes de índices	115
A. Les changements d'origine	48	A. Los cambios de origen	116
B. Les raccordements d'indices	49	B. Los empalmes de índices	117
6. Indices Chaîne	50	6. Indices cadena	118
A. Calcul	50	A. Cálculo	118
B. Avantages et inconvenients	51	B. Ventajas e inconvenientes	119
C. Etude des divergences dues au sens du calcul (Moyennes simples)	52	C. Estudio de las divergencias debidas al sentido del cálculo (Medias simples)	120
D. Comparaisons des indices chaînes et des indices à base fixe	52	D. Comparaciones de los índices cadena y de los índices de base fija ..	120
E. Exemple des prix des produits énergétiques en France	53	E. Ejemplo de los precios de los productos enérgeticos en Francia	121
F. Conclusion	54	F. Conclusión	122
7. Autres indices	54	7. Otros índices	122
A. L'indice vrai du coût de la vie	55	A. El índice verdadero del costo de la vida	122
B. Indices et méthodes utilisés pour les comparaisons internationales ..	56	B. Indices y métodos utilizados para las comparaciones internacionales ..	123
C. Autres indices	56	C. Otros índices	124
III. Pratique du calcul des indices statistiques	58		
1. Quelques indices dans différents pays	58	III. Práctica del cálculo de los índices estadísticos	126
A. Indice des prix à la consommation	58	1. Algunos índices de diferentes países	126
B. Indices des prix de gros	62	A. Indices de los precios al consumo	126
C. Indices de la production industrielle	62	B. Indices de precios al por mayor	130
2. Divergence entre les indices	62	C. Indices de la producción industrial	130
A. Divergences dues aux formules	62	2. Divergencias entre los índices	130
B. Divergences dans le choix des séries élémentaires	66	A. Divergencias debidas a las fórmulas	130
C. Divergences dues aux pondérations et au choix de l'année de base	71	B. Divergencias en la elección de las series elementales	134
D. Existe-t-il un indice synthétique unique? (Exemple des prix)	71	C. Divergencias debidas a las ponderaciones y a la elección del año de base	138
3. Indexation. Mesure du pouvoir d'achat	73	D. ¿Existe un índice sintético único? (Ejemplo de los precios)	138
A. Actualisation des données. Indexation	73	3. Indexación, medida del poder de compra	140
B. Mesure du pouvoir d'achat	78	A. Actualización de datos. Indexación	140
Conclusión	79	B. Medida del valor de compra	145
Notes	81	Conclusión	146
		Notas	148

DENBORAZKO SERIEEN AZTERKETA: INDIZE ESTATISTIKOAK

J. Fourastié
Conservatoire National des Arts et Métiers
France

LABURPENA

Serie kronologikoei buruzko sarrera baten ondoren serie hauen tratamentu grafikoaren aipamena egiten da bai grafiko-aritmetiko eta baita ere erdi-logaritmikoen bidez. Era berean urtesasoizko serieen tratamentu estatistikoa ikertzen da, eta epe laburrerako aurrikuspen metodoekin amaitzen da.

Bigarren atalean indize estatistikoen bidezko serien analisia azaltzen da, hasieran indize simpleak eta haien berezkotasuna definitzen dira eta gero indize sintetikoen nozioa adierazten da. Ondoren nazioarteko gehien erabilitako indizeak hertsiki eta zabalki deskribatzen dira.

Azkenik estatistikako indize kalkuloaren praktikaz arduratzentz da osoki hirugarren atala, herrialde desberdinaren konparaketa eta haien arteko diferentziak aztertuaz.

Egileak urteetan zehar bildurik dituen experientzi eta gogoetak agertuko dira aipamen mamitsu eta ondorio gisa azken atalean.

ANALYSE DES SERIES CHRONOLOGIQUES: LES INDICES STATISTIQUES

I. GENERALITES SUR LES SERIES CHRONOLOGIQUES

Une série statistique est une série chronologique lorsqu'elle permet de suivre les variations d'une même réalité au cours du temps (chronos, en grec.).

Les figures qui suivent présentent un certain nombre de séries chronologiques extraites de documents statistiques divers. La figure 1, extraite du 1984 Panorámica

du C.A. de Euskadi, donne l'évolution la population au Pays Basque et en Espagne de 1900 à 1981.

En figures 2 et 3, on trouvera un extrait des indicateurs des Activités Industrielles (Indicators of Industrial Activity), 1984-III dell'O.E.C.D. La figure 3 est un graphique des indices de la production industrielle dans les différents pays de l'O.E.C.D. de 1977 à 1984.

**Zuzenbidezko biztanleriaren eboluzioa
Evolución de la población de derecho**

URTEA AÑO	EUSKAL HERRIKO K.A. C.A. DE EUSKADI	ESTATUA ESTADO
1900	602.204	18.617.956
1910	672.884	19.992.451
1920	783.125	21.508.135
1930	885.601	23.844.796
1940	948.096	26.187.899
1950	1.039.465	28.368.642
1960	1.358.707	30.903.137
1970	1.867.287	34.032.801
1975	2.072.100	36.026.319
1981	2.141.809	37.746.260

Fig. 1

TOTAL INDUSTRY

INDUSTRIE TOTALE

I.S.I.C. 2, 3, and 4

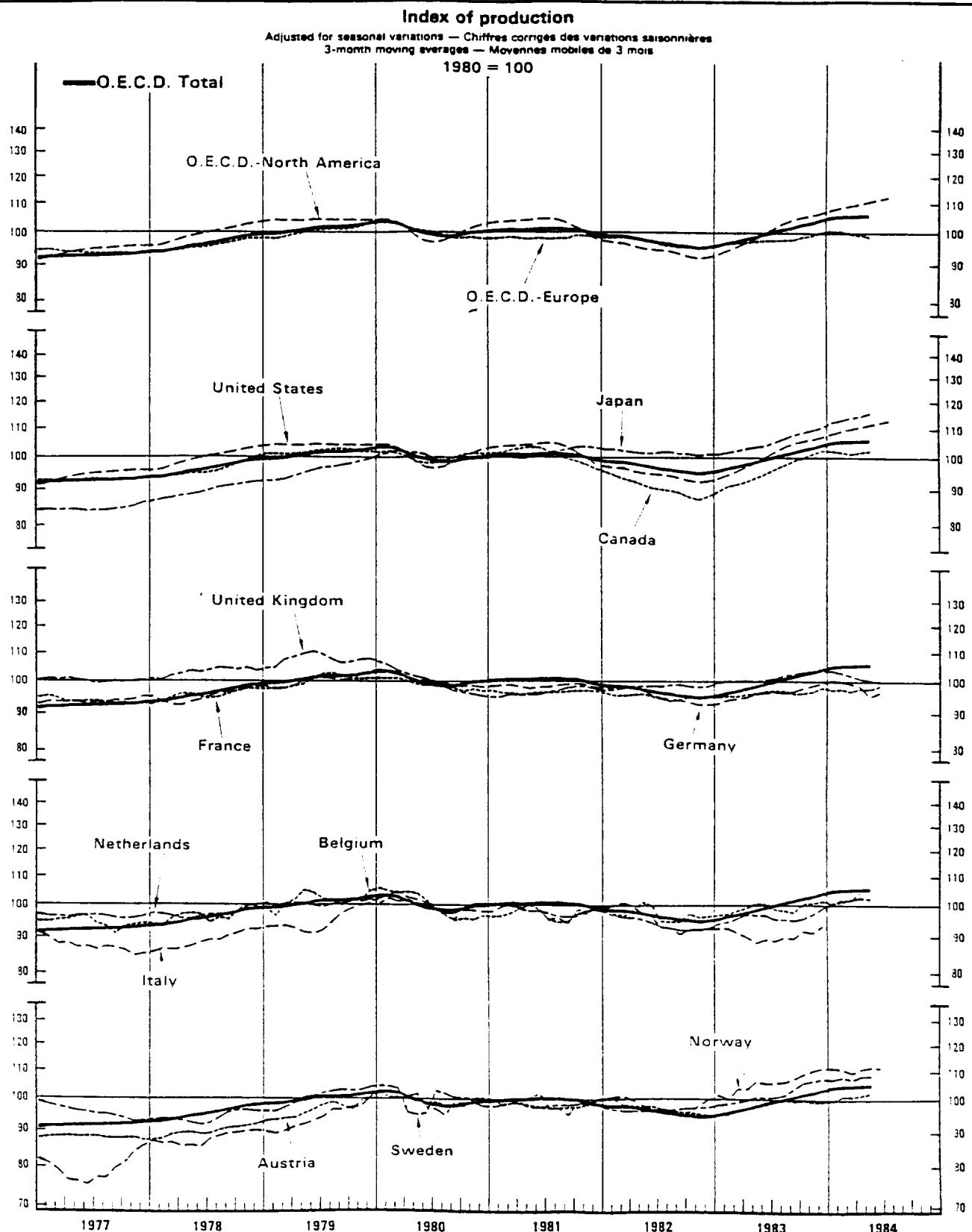


Fig. 2

TOTAL INDUSTRY

INDUSTRIE TOTALE

I.S.I.C. 2, 3 and 4

	1981	1982	1983	1983		1984		1983						1984						12-month rate of change Year-over- year 12 mos			
				Q.2	Q.3	Q.4	Q.1	Q.2	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DEC	JAN	FEB	MAR	APR	MAY	JUN			
Production																							
Canada	100	90	95	96	92	101	104	105	83	91	102	102	105	95	99	105	107	104	103	109	8.4		
United States	103	94	100	99	104	105	108	111	100	104	106	108	105	103	103	109	110	110	110	114	110	10.3	
Japan	101	101	105	103	107	111	110	115	107	101	111	109	110	113	101	110	120	115	112	118		12.0	
Australia (1)	102	97	92	92	95	96	91		95	94	96	98	101	89	72	101	100	102	99			10.4	
Austria	98	98	99	102	94	105	99	106	94	88	101	104	106	105	94	100	102	104	108	109		5.4	
Belgium	97	97	99	103	90	103	104		75	93	103	106	110	93	101	105	106	105	110			7.9	
Denmark (2)	100	103	106	109	102	111	115	116	70	114	121	110	114	108	104	110	124	106	121	121		-0.8	
Finland	103	104	107	114	95	113	110	117	67	105	112	112	116	110	109	110	112	118	117	116		1.7	
France (3)	99	97	98	101	84	105	105		85	62	97	95	105	105	105	106	100	101	101	101		1.5	
Germany	99	96	96	97	90	103	100	96	85	83	103	101	106	101	96	105	102	99	100	90	92	8.4	
Greece	99	95	96	94	95	97	94	97	88	88	104	98	98	94	93	95	95	95	98	98		1.9	
Ireland (2)	101	102	109	112	105	112	114	132	112	91	112	111	114	115	102	117	125	127	129	141		21.2	
Italy	98	95	95	97	80	100	100		97	42	100	100	105	89	94	98	102	98	102			7.0	
Luxembourg	93	90	90	92	84	97			90	66	97	100	100	92									
Netherlands	98	94	96	96	82	105	109	101	77	77	91	97	105	112	107	111	110	105	100	97		6.6	
Norway	100	99	106	104	96	115	120	110	81	99	107	114	119	112	120	120	119	107	109	113	85	2.4	
Portugal	101	105	107	109	97	109	109		107	79	107	110	109	107	107	112	107	107	107			-10.6	
Spain	99	98	100	105	88	105	105		99	60	104	105	107	104	104	104	108	99				-5.2	
Sweden (2)	98	97	103	111	84	115	108	119	42	100	109	117	117	112	107	108	109	119	119	119		8.2	
Switzerland (1)	100	96	95	97	93	101	98		95	90	103	107	110	101	103	110	110	98	97	100	95	8.3	
United Kingdom	96	98	101	98	96	106	108	95														-2.0	
E.E.C.	98	96	97	99	88	103	103	100	88	74	101	101	106	100	98	105	105	100	101	98		-0.9	
O.E.C.D.-Europe	98	97	98	100	89	104	104	101	87	76	101	102	107	101	99	105	106	101	102	100		-0.2	
North America	102	94	100	99	103	103	108	111	98	103	107	107	105	102	104	109	110	109	109	113		11.5	
O.E.C.D.-Total	100	96	100	100	97	105	106	107	94	90	105	105	107	103	101	107	109	104	106	108		6.1	
Adjusted for seasonal variations — Chiffres corrigés des variations saisonnières																							
Canada	93	97	101	101	101	102	96	97	99	100	100	100	102	103	100	101	101	102	102	102	103	7.5	
United States	98	103	106	109	111	112	102	103	105	105	106	106	106	108	109	109	110	111	112	113	10.6		
Japan	103	106	109	115	115	115	104	107	108	108	109	110	111	115	115	115	116	116	116		11.3		
Australia (1)	91	92	95	96	99		92	90	93	94	95	97	96	95	97	99	99	99	99	99		6.3	
Austria	99	100	100	102	103	103	102	99	100	100	101	100	98	102	101	102	101	102	102	104		5.4	
Belgium	101	98	101	101	100	100	99	99	99	98	108	108	106	100	100	101	102	107	107	113		7.7	
Denmark (2)	107	103	108	112			99	109	108	100	111	112	113	114	109								5.3
Finland	108	108	109	109	110		107	108	109	109	110	108	110	109	110	110	110	110	110	111		0.3	
France (3)	98	95	99	100			37	97	96	94	98	97	98	96	98	98	96	99	97	99		1.5	
Germany	96	96	99	100	95		95	96	97	97	99	99	99	98	98	97	99	99	99	99	101	8.3	
Greece	93	94	95	96	97		92	96	95	96	94	96	94	96	98	95	95	95	97	97		1.7	
Ireland (2)	105	109	113	116	124		112	106	109	108	110	123	112	115	123	122	121	121	120			21.1	
Italy	98	90	91		91	88	91	89	95	89	98	96	96	96	96								
Luxembourg	96	93	97		22	91	97	97	96	97													
Netherlands	97	95	97	102	102	102	96	95	95	97	94	94	101	101	103	101	101	103	102	101	109	7.6	
Norway	107	107	111	111	112		107	105	107	111	110	111	114	110	110	110	114	111	111	109		1.5	
Portugal	106	109	105	104			110	108	108	106	105	105	104	106	107	107	107	107	107			-10.9	
Spain	101	100	100	102			98	101	101	98	100	103	103	103	100	98	100	100	98			-5.4	
Sweden (2)	101	102	107	108	109		100	102	104	107	106	106	109	107	107	109	106	111	111	109		6.3	
Switzerland (1)	96	95	94	104			102	102	102	103	103	104	103	103	102	102	101	100	100	99		6.3	
United Kingdom	100	102	103	103	100																	-2.2	
E.E.C.	96	97	94	100	98		97	96	97	96	99	98	100	100	99	97	97	99	95			-1.6	
O.E.C.D.-Europe	97	98	101	99			97	97	98	97	100	99	101	101	98	98	98	100	96			-0.5	
North America	98	103	108	110	101	103	104	105	105	105	105	107	108	109	109	109	110	111	112		10.3		
O.E.C.D.-Total	98	101	102	105	105		100	100	101	102	103	103	103	103	104	104	105	106	105		6.0		

1. Excluding 2. 2. Excluding 4. 3. Annual and quarterly data have more complete coverage than monthly data.

1. Non compris le 2. 2. Non compris le 4. 3. Les données annuelles ou trimestrielles ont une couverture plus étendue que les données mensuelles.

Nous allons avoir l'occasion, dans les pages qui suivent, de définir beaucoup des concepts qui y apparaissent; indices, base de l'indice, correction des variations saisonnières, moyennes mobiles, graphique semi-logarithmique.

En figure 3, le tableau comprend les mêmes indices, mais détaillés mois par mois sur 12 mois.

Notre étude des séries chronologiques comprendra trois parties:

- représentations graphiques des séries chronologiques,
- traitement statistique des séries à caractère saisonnier,
- prévisions à court terme.

1.1. REPRESENTATION GRAPHIQUE DES SERIES CHRONOLOGIQUES

Comme nous le verrons dans la suite, la représentation graphique des séries chronologiques permet de faire de ces séries une première analyse. Le plus fréquemment, on utilise des graphiques cartésiens:

- l'axe des abscisses est toujours réservé au temps.
- l'axe des ordonnées porte les valeurs des observations.

On distingue deux catégories importantes de graphiques cartésiens:

le graphique arithmétique et le graphique semi-logarithmique.

A. GRAPHIQUE ARITHMETIQUE

a) Définition

Dans un graphique arithmétique, les échelles utilisées, sur chacun des deux axes, sont telles qu'à chaque valeur correspond un segment de droite dont la longueur lui est proportionnelle: ainsi, sur l'axe des abscisses, des durées égales sont représentées par des segments égaux (il faut, en particulier, en tenir compte lorsque les observations ne sont pas faites à intervalles de temps réguliers).

Il n'y a pas de règle particulière à observer en ce qui concerne le choix des unités ou le rapport entre les longueurs des segments attribuées aux unités sur chacun des axes. Il faut cependant tenir compte, pour le choix des unités et des origines, de la durée de la période d'observation et d'un prolongement ultérieur éventuel de cette durée ainsi que des valeurs extrêmes de la variable que l'on observe dans le temps (par exemple, si les observations varient entre 150 et 200, on étale les graduations de 150 à 200 sur tout l'intervalle disponible de l'axe vertical).

b) Exemple de représentation graphique sur papier arithmétique

On donne sur le tableau 1 les nombres de mariages, en milliers, célébrés en France de Janvier 1978 à Juin 1981.

(P: chiffres provisoires. Il s'agit des derniers chiffres publiés en Décembre 1981).

Source: Bulletin mensuel de statistique de l'INSEE.

TABLEAU 1

Nombre de mariages en France (milliers)

Année	Janv	Fév	Mars	Avr	Mai	Juin	Juil	Aout	Sept	Oct	Nov	Déc
1978	14,2	16,1	19,0	40,5	20,3	43,6	52,6	31,8	46,7	24,1	15,0	28,9
1979	12,1	14,2	21,2	32,8	20,1	51,9	39,5	32,4	44,8	25,5	15,5	28,4
P 1980	10,5	13,9	21,3	30,0	26,1	44,0	40,6	39,4	40,4	25,7	16,9	24,9
P 1981	11,2	13,0	16,6	26,7	23,9	39,7						

Cette série est représentée, sur papier arithmétique, par le graphique de la figure 4:

- les nombres de mariages (en milliers) sont portés sur l'axe vertical et on a retenu 10 mille mariages

comme origine.

- les mois, de Janvier 1978 à Juin 1981, sont portés sur l'axe horizontal.

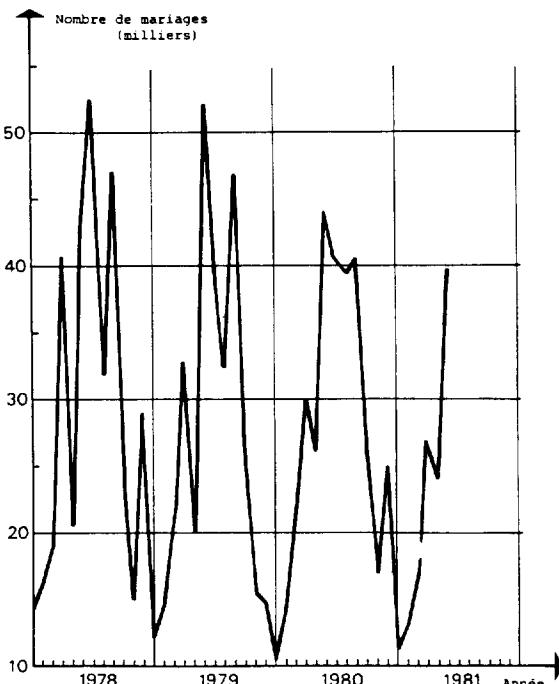


Fig. 4

B. GRAPHIQUE SEMI-LOGARITHMIQUE

Dans un graphique semi-logarithmique, on retient:

- une échelle arithmétique sur l'axe des abscisses (axe des temps),

- une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées.

Une échelle logarithmique est telle que, par rapport à cette échelle, un nombre est représenté par un segment de droite dont la longueur est proportionnelle au logarithme décimal du nombre.

Si nous revenons à la figure 2, nous pouvons voir que l'échelle des temps est une échelle arithmétique, où apparaissent les années, les trimestres et les mois.

Sur les axes des ordonnées, on peut constater que la distance comprise entre 80 et 90 est plus grande que la distance entre 130 et 140 ... On peut vérifier que les échelles des ordonnées sont logarithmiques. Les graphiques de la figure 2 sont donc semi-logarithmiques.

L'échelle logarithmique permet un tracé plus aisé et plus facilement lisible des séries chronologiques:

- lorsque la variable étudiée prend des valeurs sensiblement différentes selon les dates de la période retenue.

- lorsqu'on désire représenter, sur un même graphique, des variables dont les valeurs, en moyenne, sont notablement différentes.

Ces propriétés tiennent au fait que lorsqu'un nombre croît, le logarithme décimal croît nettement moins rapidement que ce nombre. Le tracé de la courbe $y = \lg x$ le montre clairement. (Fig. 5).

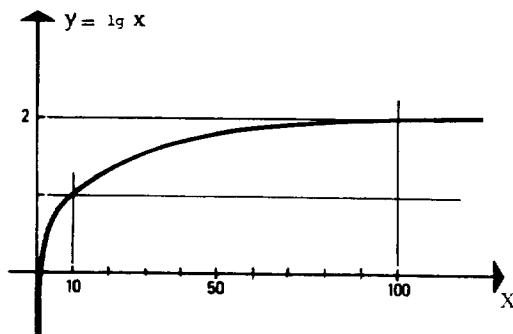


Fig. 5

a) Échelle logarithmique

L'échelle logarithmique, comme son nom l'indique, est graduée en logarithmes. L'axe représenté Fig. 6 est destiné à montrer le processus de construction. La partie droite est graduée par une échelle arithmétique: -1, 0, 1, 2. Sur cette échelle ont été portés les logarithmes de quelques nombres caractéristiques. Par exemple, entre 0 et 1, on a placé:

$$\begin{array}{ll} \lg 2 = 0,301 & \lg 6 = 0,778 \\ \lg 3 = 0,447 & \lg 7 = 0,845 \\ \lg 4 = 0,602 & \lg 8 = 0,903 \\ \lg 5 = 0,699 & \lg 9 = 0,954 \end{array}$$

Sur l'échelle de gauche qui est l'échelle logarithmique, on a écrit ces nombres: 2, 3, 4 ... Ainsi, la distance entre 1 et 2 est proportionnelle à 0,301, la distance entre 1 et 3 proportionnelle à 0,477, ...

On obtient ainsi, figure 6, une échelle sur laquelle les distances sont proportionnelles aux logarithmes. Sur un papier fonctionnel, seule cette échelle est représentée.

Notons l'existence des modules de l'échelle logarithmique: entre 0, 1 et 1, entre 1 et 10, entre 10 et 100, on retrouve la même distance, et les mêmes graduations intérieures. Il existe des papiers logarithmiques à un ou plu-

sieurs modules. On choisit le nombre de modules selon les ordres de grandeur des données que l'on veut représenter (de 0,01 à 0,1: un module; de 100 à 10.000: deux modules ...).

b) Remarques:

- Si les valeurs d'une variable varient entre 100.000 et 100 millions, la représentation sur papier semi-logarithmique nécessite un papier à 3 modules seulement, mais il faut, en général, modifier les graduations: en effet, dans la plupart des cas, le premier module comporte les valeurs 1 à 10, le suivant concerne les valeurs 10 à 100, etc...; il suffit donc de multiplier les graduations par 100.000.

- Sur certains papiers semi-logarithmiques, les graduations sont plus fines, sur l'axe vertical, pour les valeurs comprises entre 1 et 5 que pour les valeurs comprises entre 5 et 10 du fait que la distance comprise entre 1 et 5 est proportionnelle à $\lg 5 = 0,699$ et que celle comprise entre 5 et 10 est proportionnelle à $\lg 10 - \lg 5 = 0,301$ (donc environ deux fois plus faible). Il faut bien prendre en compte ce fait au moment de la représentation graphique.

c) Exemple de représentation graphique sur papier semi-logarithmique

Produit intérieur brut, en valeurs d'acquisition, aux prix courants, par habitant, pour la France, les Etats-Unis, le Japon et le Portugal, Années 1971 et 1974 à 1978.

TABLEAU 2
P.I.B. (unité: dollar des Etats-Unis d'Amérique)

	1971	1974	1975	1976	1977	1978
France	3 089	5 066	6 423	6 615	7 190	8 851
U.S.A.	5 124	6 640	7 150	7 883	8 711	9 664
Japon	2 203	4 214	4 500	5 007	6 094	8 475
Portugal	783	1 464	1 562	1 586	1 663	1 812

(Source, INSEE, Annuaire statistique de la France, 1981)

Les quatre séries chronologiques sont représentées sur un papier semi-logarithmique à deux modules dans le graphique Fig. 7.

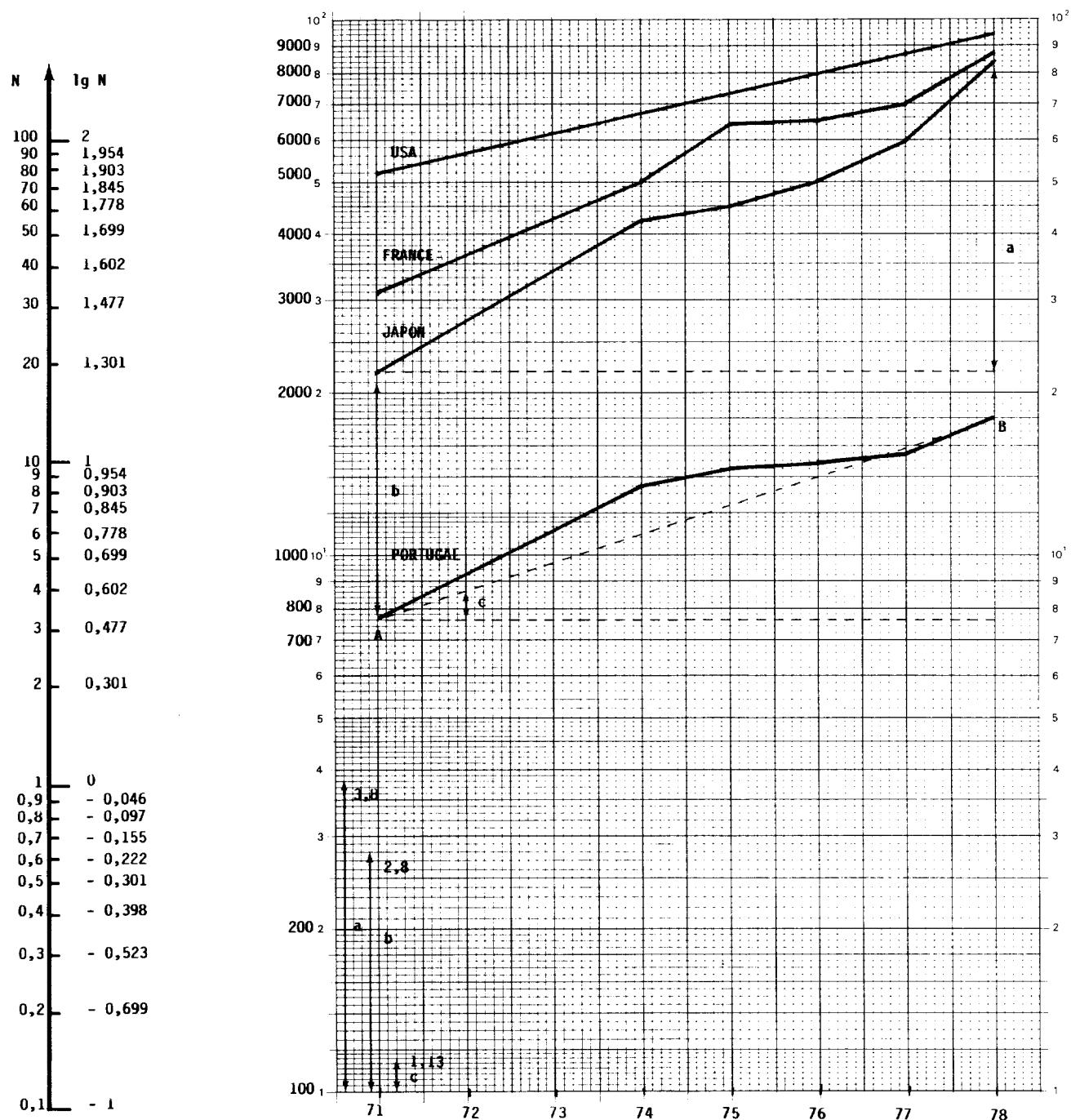


Fig. 6

P.I.B., FRANCE, ETATS-UNIS, JAPON, PORTUGAL
(en valeurs d'acquisition, aux prix courants, par habitant)

ANNEES 1971 et 1974 à 1978

Fig. 7

d) Propriétés de l'échelle logarithmique

Elles découlent des propriétés du logarithme décimal d'un nombre:

- A partir d'une représentation graphique sur papier semi-logarithmique, on peut déterminer, par simple lecture, le rapport de deux observations (dont les valeurs sont A et B). Ce rapport a un logarithme égal à la différence des deux ordonnées, puisque:

$$\lg B - \lg A = \lg (B/A)$$

Il suffit de reporter, sur l'axe vertical, en partant de l'origine d'un module quelconque, la différence des ordonnées des deux observations A et B et de lire le rapport; on a, en effet, reporté une longueur égale à $\lg B - \lg A$, on lit donc, sur l'échelle la valeur de B/A.

Application numérique. A l'aide du graphique, on peut, par simple lecture, lire le rapport entre les valeurs du PIB par habitant au Japon pour 1971 et 1978 (longueur a): 3,8 ou le rapport entre les PIB, en 1971 du Japon et du Portugal (longueur b): 2,8.

L'évolution d'une grandeur qui s'accroît d'un pourcentage constant dans le temps est représentée par une droite sur papier semi-logarithmique.

En effet, si on a, par exemple, une série annuelle et si la variable observée (notée x) a pour valeur A l'année 0 et que son taux de croissance annuel est égal à r, on a, année par année, les valeurs suivantes pour x:

année 0	A
année 1	$A(1+r)$
.	.
.	.
année t	$A(1+r)^t$

Sur une échelle logarithmique, on porte les valeurs suivantes:

année 0	$\lg A$
année 1	$\lg [A(1+r)] = \lg(1+r) + \lg A$
.	.
.	.
année t	$\lg [A(1+r)^t] = t \lg(1+r) + \lg A$

On constate donc qui l'on porte, sur le papier semi-logarithmique, des valeurs qui croissent de $\lg(1+r)$, c'est-à-dire d'une quantité constante, d'une année par rapport à la précédente; en joignant ces points, on obtient une droite.

- Il découle de ce qui précède que l'on peut calculer, à partir d'une représentation sur papier semi-logarithmique, des taux moyens de croissance. Il suffit de tracer une droite entre les deux points correspondant aux extrémités de la période étudiée; cette droite représente ce qu'aurait été l'évolution si elle avait été régulière, avec un taux de croissance constant. On peut lire le rapport:

. entre deux observations espacées de 1 an, si l'on désire avoir le taux de croissance annuel moyen,

. entre deux observations espacées de 1 mois, si l'on désire avoir le taux de croissance mensuel moyen,

. entre la première et la dernière observation si l'on désire le rapport global.

La lecture se fait en relevant la différence entre les ordonnées sur le graphique et en la reportant sur l'axe vertical, à partir de l'origine d'un module.

Application numérique:

Si l'on se reporte au graphique, on peut obtenir, par lecture graphique, les taux moyens d'accroissement annuel sur la période 1971-1978 pour les PIB par habitant, au Portugal, au Japon, en France, et aux U.S.A. Pour obtenir chacun de ces taux, on joint par une droite les points de chaque série chronologique correspondant aux années 1971 et 1978 (droite AB pour le Portugal) et l'on reporte, à partir de l'origine d'un module, les longueurs correspondant aux différences entre les ordonnées de deux points de la droite dont les abscisses sont espacées de un an (longueur c pour le Portugal).

On obtient les taux annuels moyens de croissance suivants:

- . pour la France : 16%
- . pour les Etats-Unis : 9%
- . pour le Japon : 21%
- . pour le Portugal : 13%

Ainsi, pour le Portugal, la croissance totale est:

$B/A \approx 2,3$, soit une augmentation de 130%

Le graphique permet de lire la croissance moyenne annuelle:

$$\sqrt[7]{2,3} = 1,13 \text{ soit une augmentation de } 13\%$$

1.2. TRAITEMENT STATISTIQUE DES SERIES A CARACTERE SAISONNIER

A. DEFINITION

Beaucoup de séries chronologiques sont connues par mois, semaine et même jour.

Les indices les plus usuels sont calculés chaque mois, voire chaque semaine. Un problème se pose, celui du rôle de la période de l'année. Par exemple, l'indice brut de la production industrielle des automobiles en France est passé de:

188 en juin 1983
à 139 en juillet 1983
et à 62 en août 1983.

Doit-on conclure à une faillite de l'industrie automobile française (baisse de plus de 60% en deux mois)? Non. Il est facile de remarquer que le mois de juin est un mois d'assez grande production (avant le départ en vacances), et que par contre les mois de juillet et d'août sont des mois où la production est plus faible, surtout en août, par suite des congés payés des ouvriers et employés de l'industrie automobile. On peut alors constater qu'une pareille baisse se retrouve l'année précédente: en 1982:

164 en juin
139 en juillet
41 en août

Source: I.N.S.E.E., Annuaires Statistiques de la France.

Le problème est donc de distinguer ce qui, dans ces valeurs, est imputable à une variation importante de la conjoncture, et ce qui est dû à la saison.

Cette distinction est en grande partie arbitraire. On fait une hypothèse sur les variations:

La variation ... d'un mois sur le mois précédent est la résultante de deux groupes de causes, le premier rassemblant toutes les causes qui sont liées à la saison, et le second tous les autres. (!).

Le premier groupe de causes engendre le **mouvement saisonnier**, le second le **mouvement de longue durée ou tendance**, mouvement désaisonnalisé. Il existe assez souvent aussi un **mouvement conjoncturel** qui s'ajoute aux précédents. La façon de déterminer ce mouvement de longue durée n'est pas unique: il en résulte que les coefficients saisonniers qui déterminent le mouvement saisonnier ne sont pas non plus déterminés de façon unique.

Aussi, un grand nombre de séries chronologiques mensuelles sont affectées de variations saisonnières. On entend par variations saisonnières des alternances imposées par le rythme des saisons. Ainsi l'influence de la saison est manifeste sur des variables telles que le prix des fruits frais, le prix des légumes, les recettes de l'industrie hôtelière, la production mensuelle de certains biens tels que les voitures particulières (chute systématique du mois d'août), les ventes journalières dans un grand magasin...

Par définition, les variations saisonnières se reproduisent chaque année avec la même amplitude pour des mois homologues ou chaque semaine pour des jours homologues: le mouvement saisonnier est périodique.

Ainsi, l'analyse des séries chronologiques mensuelles pour telle variable peut faire apparaître des variations dans le temps dont certaines résultent de facteurs purement saisonniers. Pour se faire une idée correcte de l'évolution proprement conjoncturelle de la variable étudiée, il est important de séparer le mouvement saisonnier du mouvement extrasaisonnier. C'est pour cette raison que l'on parle de décomposition de séries chronologiques. Pour connaître le mouvement extra-saisonnier, on réalise une série chronologique désaisonnalisée; son obtention se fait par désaisonnalisation de la série chronologique brute.

Remarque importante:

L'observation des valeurs prises par le mouvement extra-saisonnier sur une assez longue période (plusieurs années) permet de déceler trois composantes dans ce mou-

vement:

- le *trend* (tendance) ou *mouvement longue durée* qui traduit les variations dues à des modifications structurelles de nature économique, sociologique, politique,

- le *mouvement cyclique* qui se traduit par des oscillations de part et d'autre du mouvement de longue durée correspondant à l'évolution de la conjoncture économique.

- les *variations accidentelles*, dues à des événements extérieurs (grèves, crises, ...) qui ne relèvent pas de deux autres types de mouvement.

La décomposition du mouvement extra-saisonnier en trend et mouvement cyclique n'est nécessaire que pour les problèmes de prévision à moyen ou long terme. Elle ne sera donc pas traitée ici, car nous nous limitons au problème de la désaisonnalisation et à son application à la prévision à court terme.

B. UN PROCEDE INSUFFISANT

En reprenant l'exemple cité de la production d'automobiles en France, on serait tenté de penser qu'il suffit de comparer la donnée du mois d'août 1983 avec celle du mois d'août 1982 pour éliminer les *variations saisonnières*. En fait:

- Si la grandeur considérée a eu une variation nette entre ces deux dates (par exemple croissance puis décroissance), il est possible que le rapport des deux valeurs aux mois d'août soit supérieur à 1, alors qu'on est en période de décroissance (voir la Figure 8).

- Le procédé dépend autant de la variation de l'année précédente que de celle de l'année actuelle: avec le même exemple, on voit que si le rapport est supérieur à 1, c'est uniquement parce que l'année précédente était une année de croissance. On ne peut rien conclure sur la tendance conjoncturelle de l'année actuelle.

C. METHODE DES MOYENNES MOBILES

Pour déterminer le mouvement général de la série, il est nécessaire d'estimer, sur les données passées, les résultats **corrigés des variations saisonnières** qui constituent le *mouvement de longue durée*, ou tendance.

Cette estimation peut se faire, en première approximation, à l'aide d'un graphique: sur le graphique représentant les données brutes, on trace au jugé une courbe aussi régulière que possible, représentant la tendance. Ce procédé a l'avantage d'être simple, et de traiter les mouvements les plus divers. Cependant, il est assez arbitraire, et on lui préfère en général la méthode des **moyennes mobiles**, qui va être présentée ici:

a) Principe de la méthode

La méthode des moyennes mobiles repose sur le principe suivant: les variations saisonnières disparaissent pratiquement lorsqu'on remplace les valeurs observées de la série par des moyennes calculées sur une période suffisamment longue (3 mois, 4 mois, 5 mois, ... ou 12 mois). La période doit être choisie en fonction de la périodicité des résultats: s'il s'agit de variations saisonnières sur une année, la période est 12 mois, 4 trimestres ou 3 quadrimestres...

Les moyennes se calculent de la façon suivante: (à titre d'exemple on donne ci-contre, Fig. 9, le mode de calcul pour 3 mois, 4 mois et 12 mois).

Remarques importantes:

1. Pour calculer des moyennes mobiles sur des périodes comportant un nombre de mois pair, on fait intervenir, dans le calcul, un mois de plus, cela afin de pouvoir affecter les moyennes mobiles à des mois précis.

Ainsi, la moyenne M_1 ci-contre devrait être placée entre x_2 et x_3 . Si les indices désignent les mois de l'année, chaque valeur x_i étant affectée au 15 du mois, M_1 correspond au 1er mars (entre les centres des mois 2 et 3) alors que M_2 correspond au 15 mars, date pour laquelle on connaît l'observation x_3 :

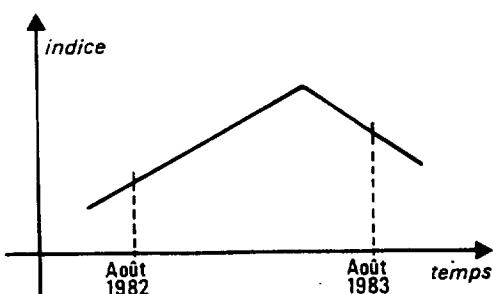


Fig. 8

$$\begin{aligned} &x_1 \\ &x_2 \\ \leftarrow &\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = M_1 \end{aligned}$$

$$x_3 \leftarrow \left(\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_5}{2} \right) / 4 = M_2$$

x_4

2. Dans la pratique on se contente de calculer des moyennes mobiles sur 3 ou 4 mois, si les oscillations saisonnières sont assez faibles; par contre, si l'on est en présence d'une série chronologique avec des variations saisonnières importantes d'un mois sur l'autre, on calcule des moyennes mobiles sur 12 mois.

3. Dans un certain nombre de cas, les valeurs prises par une variable économique d'un mois donné dépendent de l'importance de l'activité économique pendant ce mois; celle-ci est fonction du nombre de jours ouvrables. Il convient alors de procéder, avant la désaisonnaliisation, à une correction du nombre de jours ouvrables: la méthode retenue consiste, en règle générale, à calculer, pour chaque année, le nombre mensuel moyen de jours ouvrables et à corriger ensuite chaque valeur mensuelle à l'aide d'une règle de trois:

$$\text{Valeur corrigé} = \frac{\text{Nombre mensuel moyen de jours ouvrables dans l'année}}{\text{Nombre de jours ouvrables du mois } X} \times \text{Valeur brute du mois } X$$

Moyennes mobiles

Mois	Observations	moyennes mobiles sur		
		3 mois	4 mois	12 mois
1	x_1			
2	x_2	$(x_1 + x_2 + x_3) / 3$		
3	x_3	$(x_2 + x_3 + x_4) / 3$	$\left(\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_5}{2} \right) / 4$	
4	x_4	$(x_3 + x_4 + x_5) / 3$	$\left(\frac{x_2}{2} + x_3 + x_4 + x_5 + \frac{x_6}{2} \right) / 4$	
5	x_5	.	.	
6	x_6	.	.	
7	x_7	.	.	$\left(\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \dots + x_{12} + \frac{x_{13}}{2} \right) / 12$
8	x_8	.	.	$\left(\frac{x_2}{2} + x_3 + x_4 + \dots + x_{13} + \frac{x_{14}}{2} \right) / 12$

Fig. 9

Nombre de mariages célébrés en France (milliers)
Calcul des Rapports saisonniers et de la tendance

Année	J.	F.	M.	A.	M.	J.	J.	A.	S.	O.	N.	D.
1978 (1)	14,2	16,1	19,0	40,5	20,3	43,6	52,6	31,8	46,7	24,1	15,0	28,9
(2)							29,3	29,1	29,2	28,9	28,6	28,9
(3)							1,80	1,09	1,60	0,83	0,52	1,00
1979 (1)	12,1	14,2	21,2	32,8	20,1	51,9	39,5	32,4	44,8	25,5	15,5	28,4
(2)	28,7	28,2	28,2	28,1	28,2	28,2	28,1	28,1	28,0	27,9	28,1	28,0
(3)	0,42	0,50	0,75	1,17	0,71	1,84	1,41	1,15	1,60	0,91	0,55	1,01
1980 (1)	10,5	13,9	21,3	30,0	26,1	44,0	40,6	39,4	40,4	25,7	16,9	24,9
(2)	27,7	28,0	28,2	28,0	28,0	28,0	27,8	27,8	27,6	27,3	27,0	26,8
(3)	0,40	0,50	0,76	1,07	0,93	1,57	1,46	1,42	1,46	0,94	0,63	0,93
1981 (1)	11,2	13,0	16,6	26,7	23,9	39,7						
(2)												
(3)												

Fig. 10

- (1) Données brutes
- (2) Moyenne mobile sur 12 mois
- (3) Rapports saisonniers

b) Exemple numérique: nombre de mariages célébrés en France de 1978 à 1981.

La fig. 10 reprend les nombres de mariages célébrés en France qui ont fait l'objet du graphique de la fig. 4.

La série, ainsi présentée, est trop courte pour qu'on puisse en tirer des conclusions. Mais une étude de cette série sur une plus longue période a permis de déceler des variations saisonnières. Le graphique de la fig. 4 montre également que l'hypothèse de l'existence d'un mouvement saisonnier, même sur cette courte séries, est tout à fait réaliste.

La figure 10 indique pour chaque année:

- en première ligne, le nombre de mariages, en milliers,
- en deuxième ligne, la moyenne mobile sur douze mois,

- en troisième ligne, les rapports saisonniers (dont nous parlerons au paragraphe suivant).

Ainsi, pour le mois de juillet, 1978, on a calculé la somme sur 12 mois, dont la moitié du nombre de mariages de janvier 1978 et la moitié de ceux de janvier 1979:

$$\frac{14,2}{2} + 16,1 + 19,0 + \dots + 28,9 + \frac{12,1}{2} = 351,75$$

d'où la moyenne (tendance calculée par la méthode des moyennes mobiles):

$$\frac{351,75}{12} = 29,31$$

Cette moyenne est centrée en juillet 1978: elle représente donc la valeur de la tendance, calculée par la méthode des moyennes mobiles, pour cette date. On calcule de même les autres moyennes qui figurent en ligne (2) du tableau.

c) Généralisation de la méthode des moyennes mobiles

La méthode des moyennes mobiles est une méthode de lissage, c'est-à-dire qu'elle atténue les variations d'une série chronologique. Comme telle, elle peut être employée pour lisser une série, que celle-ci présente ou non des variations saisonnières. C'est ainsi qu'on peut rencontrer des moyennes mobiles sur trois mois. Il existe également des moyennes mobiles pondérées, dans lesquelles on donne, en général, un poids plus important aux observations centrales, et moins important aux observations plus éloignées du centre.

D. LES COEFFICIENTS SAISONNIERS

Pour caractériser chaque mois, on utilise les coefficients saisonniers qui sont en général déterminés à l'aide des données passées et servent ensuite aux prévisions. Il est en effet plus facile de prévoir la tendance et ensuite d'utiliser les coefficients saisonniers pour rétablir le caractère saisonnier de la série.

Les coefficients saisonniers peuvent être additifs ou, plus souvent, multiplicatifs. Nous ne traitons ici que des coefficients saisonniers multiplicatifs.

a) Définition

Les coefficients saisonniers sont calculés à partir des rapports saisonniers. On appelle rapport saisonnier pour un mois X le rapport:

$$\frac{\text{Valeur de la variable au mois } X}{\text{Moyenne mobile relative au mois } X} = \frac{\text{Valeur observée}}{\text{Tendance}}$$

En principe, les rapports saisonniers ne devraient pas varier d'une année sur l'autre. Dans la pratique, pour un mois donné, les rapports saisonniers varient légèrement d'une année sur l'autre, à cause des variations accidentnelles. Si ces variations sont trop importantes, cela peut être soit parce que l'on n'a pas retenu une période suffisamment longue pour l'étude, soit parce que la série chronologique considérée n'est pas affectée de variations saisonnières suffisamment significatives, soit encore pour d'autres raisons dont certaines apparaîtront sur l'exemple.

Si, par contre, les variations entre les rapports saisonniers sont faibles, on en déduit un coefficient saisonnier, moyenne, médiane ou valeur la plus probable des rapports saisonniers pour chaque mois.

b) Exemple de calcul

En reprenant l'exemple de la figure 10, la tendance en juillet 1978 avait été mesurée par 29, 31 milliers de mariages. Le rapport saisonnier est donc, pour ce mois de juillet 1978:

$$\frac{\text{Valeur observée}}{\text{Tendance}} = \frac{52,6}{29,3} = 1,80$$

On calcule de la même manière tous les rapports saisonniers qui figurent en ligne (3) du même tableau.

On peut déduire de ce tableau des coefficients saisonniers pour les mois où les rapports saisonniers ne sont pas trop différents. Nous choisirons en principe la moyenne des rapports saisonniers:

janvier	$\frac{0,42 + 0,40}{2} = 0,41$
février	0,50
mars	0,75
avril	$\frac{1,17 + 1,07}{2} = 1,12$
mai	les rapports sont trop différents
juin	les rapports sont trop différents
juillet	$\frac{1,80 + 1,41 + 1,46}{3} = 1,56$
août	$\frac{1,09 + 1,15 + 1,42}{3} = 1,22$
septembre	$\frac{1,60 + 1,60 + 1,46}{3} = 1,55$
octobre	$\frac{0,83 + 0,91 + 0,94}{3} = 0,89$
novembre	$\frac{0,52 + 0,55 + 0,63}{3} = 0,57$
décembre	$\frac{1,00 + 1,01 + 0,93}{3} = 0,98$

Le caractère saisonnier de la série est indubitable. Cependant, nous avons été amenés à refuser de calculer certains coefficients saisonniers. On voit que la méthode n'est pas à appliquer sans discernement; son échec relatif ici provient de deux causes:

- d'une part, comme il a déjà été dit précédemment, la série est trop courte, on ne connaît que deux ou trois rapports saisonniers.

- d'autre part, le mois ne semble pas très caractéristique de la saisonnalité de la série. On peut constater surtout que le nombre de mariages des mois de mai et juin réunis permettrait une meilleure étude:

mai et juin 1979:

valeur observée : 70,0
tendance : 56,4
rapport saisonnier : 1,24

mai et juin 1980:

valeur observée : 70,1
tendance : 56
rapport saisonnier : 1,25

Cette fois, on trouve deux rapports saisonniers très voisins et il est possible d'en déduire un coefficient saisonnier. Il est probable que la simple répartition des samedis incite les personnes à se marier en mai plutôt qu'en juin ou vice versa et que, par conséquent, l'étude doit être faite en réunissant ces deux mois.

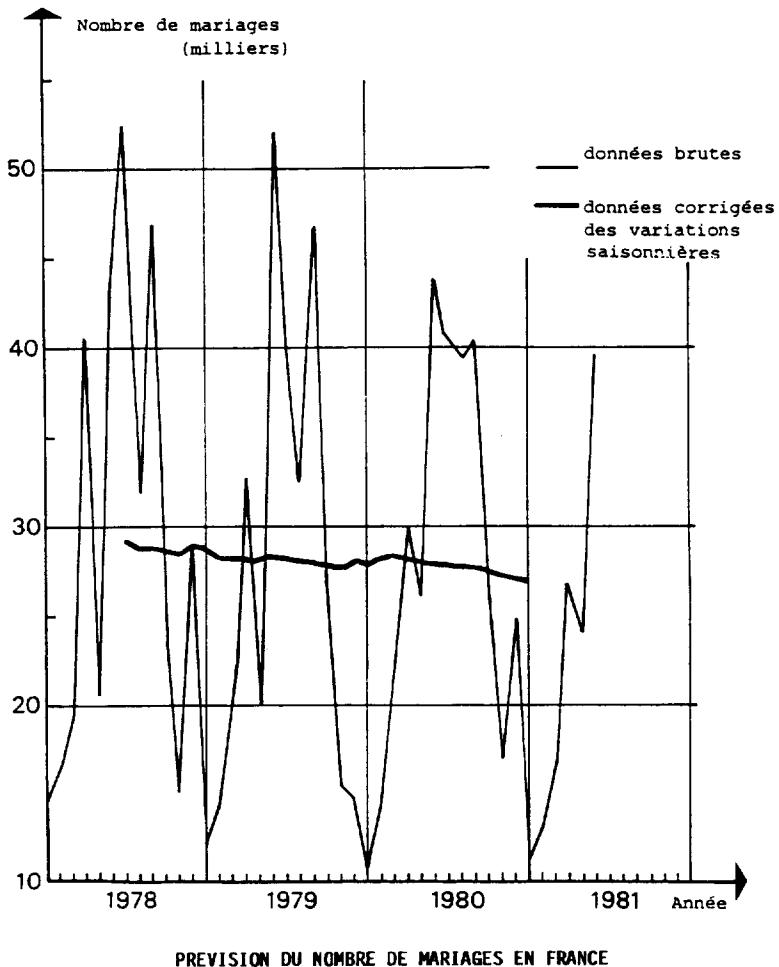


Fig. 11

L'étude faite sur cette série de nombres de mariages permet alors de conclure au caractère saisonnier de la série, en même temps qu'à sa tendance générale à la baisse. La représentation graphique du mouvement saisonnier et de la tendance sont l'objet de la fig. 11.

1.3. PREVISIONS A COURT TERME

A. PRINCIPE

A partir d'une série chronologique donnée pour le passé, on désire prévoir le futur immédiat. Deux grandes catégories de méthodes sont possibles:

- une extrapolation de la série donnée. On utilise uniquement les nombres de cette série et les dates correspondantes. On suppose que l'environnement ne change pas et que l'évolution de la série sera la même. Nous développons dans ce paragraphe quelques unes des méthodes d'extrapolation.

- une prévision à l'aide de variables explicatives. Il s'agit de déterminer les facteurs (du moins les facteurs quantitatifs, les seuls que l'on soit capable de faire intervenir dans un calcul) qui représentent des causes du phénomène à prévoir. Les méthodes utilisées sont en général l'estimation du passé par une régression (simple ou multiple) et la prolongation de la tendance ainsi obtenue. Pour ne pas allonger démesurément ce cours, nous ne les développerons pas ici.

B. CORRECTION DES VARIATIONS SAISONNIERS ET EXTRAPOLATION DE LA TENDANCE

Compte-tenu des définitions et des méthodes données ci-dessus, on peut retenir le processus suivant:

a) Détecter si la série chronologique présente des variations saisonnières

Il s'agit de vérifier que la série présente des oscillations qui se reproduisent à des mois déterminés avec des amplitudes qui sont essentiellement fonction du mois considéré.

Pour vérifier qu'il y a effectivement un mouvement saisonnier, on peut procéder à une représentation graphique qui superpose les différentes années d'observation dont on dispose: si l'on obtient des courbes à peu près parallèles, on conclut à l'existence d'un mouvement saisonnier (Figure 12).

b) Désaisonnaliser la série chronologique

On choisit d'après l'importance présumée des variations saisonnières, une période pour le calcul des moyennes mobiles et on applique la méthode décrite précédemment:

- calcul des moyennes mobiles et représentation graphique de leur évolution (mouvement extra-saisonner)

- calcul des rapports saisonniers. On choisit alors comme coefficient saisonnier pour chaque mois, soit la moyenne, soit la médiane, soit une autre valeur probable des rapports saisonniers.

VALEUR DE LA VARIABLE

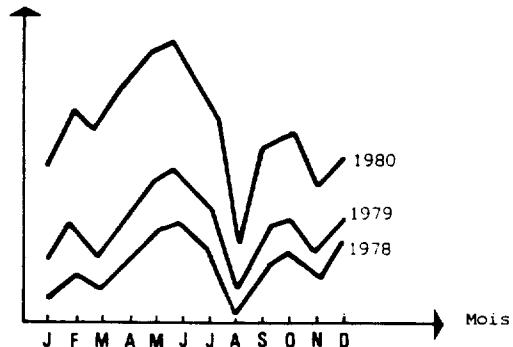


Fig. 12

c) Extrapoler le mouvement extra-saisonner

La représentation graphique du mouvement extra-saisonner présente des oscillations d'un mois sur l'autre nettement moins importantes que celles de la série brute. On peut faire un ajustement sur la série désaisonnalisée, alors que ce n'est pas possible sur la série brute. On peut soit faire une extrapolation à vue, soit chercher à ajuster une droite de régression si le mouvement extra-saisonner se présente comme étant à peu près linéaire, soit encore chercher à ajuster une droite de régression à partir des logarithmes des moyennes mobiles, si le mouvement extra-saisonner est d'allure exponentielle.

d) Application des coefficients saisonniers aux valeurs extrapolées

On arrive ainsi à une prévision de la tendance. On multiplie chaque résultat par le coefficient saisonnier adéquat pour obtenir une prévision des données brutes.

e) Exemple numérique

On souhaite avoir une prévision du nombre de mariages en France pour Janvier et Octobre 1982, à partir de données précédentes.

a) on constante, sur la représentation graphique de la fig. 11 que le mouvement extra-saisonnier se partage en deux parties: la première correspond à une situation de baisse ou de stagnation, jusqu'en juillet 1980. A partir de juillet 1980, il y a baisse plus forte.

Le prévisionniste est alors confronté à trois hypothèses possibles au moins:

1) La baisse observée depuis un an est accidentelle; il y aura reprise d'ici quelques mois. Dans ce cas, il conclut que le mouvement tendanciel va revenir autour de 28 mille mariages, et établit ses prévisions en conséquence:

janvier 82: $28 \times 0,41 = 11,48$ soit environ 11 500 mariages

octobre 82: $28 \times 0,89 = 24,92$ soit environ 25 000 mariages

2) La baisse est régulière et va se continuer. Dans ce cas, l'hypothèse d'une corrélation linéaire entre le temps et les moyennes mobiles peut être testée pour le passé. On considère la série double du tableau suivant:

TABLEAU 3
Etude d'une corrélation linéaire entre les moyennes mobiles et le temps

Temps (X)	Moyenne mobile (Y)
1 (juillet 78)	29,3
2	29,1
3	29,2
.	.
.	.
29 (novembre 80)	27,0
30 (décembre 80)	26,8

On obtient:

$$\bar{x} = 15,50 \text{ (mois)}$$

$$\bar{y} = 28,13 \text{ (millions de mariages)}$$

$$\sigma_x = 8,66 \text{ (mois)} \quad \text{écart-type de } x$$

$$\sigma_y = 0,57 \text{ (milliers de mariages)} \quad \text{écart-type de } y$$

$$\sum x_i y_i = 12\ 948,7$$

Le coefficient de corrélation est:

$$r = -0,90$$

il est assez satisfaisant. On peut donc ajuster une droite par la méthode des moindres carrés, avec:

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \left(\frac{\text{covariance de } X \text{ et de } Y}{\text{variance de } X} \right)$$

$$= \frac{-4,44}{74,92} = -0,0593$$

d'où l'équation :

$$y = 28,13 - 0,0593(x - 15,5,)$$

on trouve alors, pour le mois de janvier 1982 (mois 43)

$$\hat{y} = 28,13 - 0,0593(43 - 15,5) = 26,5 \text{ mille mariages}$$

(en tendance) et pour le mois d'octobre 1982 (mois 52)

$$\hat{y} = 26 \text{ mille mariages}$$

D'où les prévisions en variations saisonnières, en janvier 1982:

$$26,5 \times 0,41 = 10\ 900 \text{ mariages}$$

et en octobre:

$$26 \times 0,89 = 23\ 100 \text{ mariages}$$

3) Une troisième hypothèse consiste à ne retenir la tendance que depuis juillet 1980 puisque la baisse on trouve alors le chiffre prévisionnel de 9 800 mariages en janvier 1982 et celui de 19 800 mariages en octobre 1982.

C. AUTRES MÉTHODES

La méthode d'extrapolation que nous venons d'utiliser s'applique particulièrement aux séries à caractère saisonnier. Cependant, une extrapolation par la méthode des moindres carrés peut être utilisée pour toute série qui, désaisonnalisée ou non, présente graphiquement l'allure d'une droite ou d'une exponentielle.

D'autres méthodes peuvent s'appliquer à des séries quelconques. Citons en particulier le *lissage exponentiel*:

Cette méthode consiste à prévoir les données futures en fonction des données passées. On se donne une constante β de lissage inférence à 1. La prévision à la date $t + 1$ se déduit des précédentes $x_t, x_{t-1} \dots x_0$ par la formule:

$$\hat{x}_{t+1} = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j x_{t-j}$$

ce qui peut aussi s'écrire:

$$\hat{x}_{t+1} = \beta \hat{x}_{t-1} + (1 - \beta) x_t$$

Opérer un lissage exponentiel, c'est prévoir le futur en fonction du passé, en donnant plus d'importance au passé proche qu'au passé lointain.

D. CONCLUSIONS SUR LES MÉTHODES DE PRÉVISION

Nous l'avons déjà dit à plusieurs reprises, ce cours est loin d'être un exposé complet des méthodes existantes. Cependant, nous voudrions faire un certain nombre de réflexions générales à partir de l'exemple des mariages du (B):

1. Les prévisions selon les trois hypothèses sont sensiblement différentes. Le choix de l'une de ces hypothèses ou d'une autre encore dépend d'une réflexion sur le phénomène. Une étude démographique que et sociologique doit être faite, de façon à répondre à des questions comme:

- la baisse du nombre de mariages est-elle à une baisse démographique (classes d'âges moins nombreuses arrivant à l'âge du mariage)?

- est-elle due à une attitude morale (cohabitation préférée au mariage)?

-est-elle accidentelle (par exemple liée à la situation économique immédiate)?.

De telles questions s'avèrent difficiles, même pour les spécialistes.

2. Il est fondamental, lorsqu'on donne un chiffre prévisionnel, d'adjoindre à celui-ci une estimation des degrés d'incertitude dont est entaché ce chiffre. Le degré d'incertitude se traduit pour une fourchette qui sera plus ou moins grande suivant la qualité de la prévision.

Dans le cas de l'exemple, notre analyse conduirait à indiquer que les nombres de mariages prévus sont compris entre ceux de la première hypothèse et ceux de la troisième:

pour janvier 1982: entre 9 800 et 11 500 mariages,
pour octobre 1982: entre 19 800 et 25 000 mariages.

3. L'exemple a été choisi -volontairement- avec des données anciennes. On connaît les nombres réels de mariages en 1982: en janvier 11 408 mariages et en octobre 27 415. Les résultats observés sont donc aussi et même plus élevés que dans la meilleure des hypothèses. Un examen attentif de l'évolution du nombre de mariages en France depuis 1980 montre cependant une baisse importante. L'échec de l'hypothèse *baisse* est en fait l'échec de l'étude mensuelle: un phénomène analogue à celui que nous avons examiné en regroupant les mois de mai et de juin se produit ici. Une bonne étude prévisionnelle aurait dû être faite sur une période passée plus longue et en choisissant une autre unité que le mois.

Ces trois remarques mettent en évidence les nombreuses réflexions et nuances qui doivent accompagner l'application des méthodes statistiques.

II. THEORIE DES INDICES STATISTIQUES

1. QU'EST-CE QU'UN INDICE?

Le mot indice est employé dans beaucoup de sens différents. Il l'est de plus en plus dans un sens statistique: nous tenterons d'approfondir cet aspect dans la suite, mais commençons par recenser toutes les significations possibles. Les définitions du **Petit Robert**, dictionnaire français usuel, pourront nous y aider:

INDICE- 1^e Signe apparent qui indique avec probabilité - 2^e Dr. Fait connu qui sert à constituer la preuve par présomption...

Nous ne détaillerons pas ces significations, car il ne s'agit pas d'indices statistiques: mais retenons qu'un indice montre, permet de déceler un phénomène, sans donner la certitude que ce phénomène existe (c'est ce que signifie le avec probabilité du Robert).

II. (1869) Sc et cour. 1^e Indication numérique ou littérale qui sert à caractériser un signe - Math. Caractère de petite taille qui se place en bas et à droite de la lettre qu'il caractérise: a_0 , a_1 , a_n se lisant à indice zéro, à indice un, à indice n - 2^e Indication numérique qui sert à exprimer un rapport. Indice de réfraction de la lumière, - indice d'octane d'un carburant, - indice céphalique - 3^e (Déb. XXe) Nombre indiquant le rapport entre le prix moyen unitaire d'un article à la période donnée et celui de ce même article à la période de base, où il est exprimé par le nombre 100.
Indice des prix ou nombres-indices - Indice général des prix: moyenne arithmétique des indices unitaires.

Les trois sens exprimés ici sont tous trois scientifiques. Nous aurons assez souvent à utiliser le mot indice dans l'acception n° 1, mais c'est la 3^e qui est du objectif actuel. Une signification plus précise (et plus exacte) de ce que nous appelons des **indices statistiques** doit donc être donnée.

Un indice statistique est toujours un rapport, exprimé généralement en le multipliant par 100. On calcule un indice pour comparer des résultats numériques, dans le temps ou dans l'espace, sous une forme plus parlante que les données brutes.

Il existe deux grandes catégories d'indices statistiques qui vont être explicitées dans la suite de ce chapitre:

- les indices simples, calculés comme le rapport de deux valeurs d'une grandeur (qui ne sont pas obligatoirement, comme semble l'affirmer le **Robert**, des prix) ex: indice du prix de pain, indice des effectifs d'ouvriers dans l'industrie ...

- les indices synthétiques dans lesquels interviennent plusieurs grandeurs, ex: indice général des prix, indice de la production industrielle.

2. LES INDICES SIMPLES

On parle donc d'indice simple chaque fois que l'on a à comparer deux grandeurs, soit dans le temps, soit dans l'espace, et qu'on en effectue le rapport.

A. COMPARAISON DE GRANDEURS DANS LE TEMPS

Un exemple permet de comprendre ce qu'est un indice simple, qu'on appelle aussi indice élémentaire, indice particulier, ou indice analytique. Le prix du kilo de beefsteak à Paris était de 11,05 F en 1960 (année que nous choisissons pour base en lui affectant un zéro(2)); il était de 104,03 F le kg (filet) en 1982: 76,36 F en 1980 et 71,88 en 1979. Nous appelons j l'année courante: ce sera successivement ici 1979, 1980 et 1982. On choisit une seule année de base, celle qui sert de référence et pour laquelle l'indice vaut 100, mais il peut y avoir plusieurs années courantes.

Calculons l'indice du prix du beefsteak en 1982, base 100 en 1960 et pour cela calculons le rapport des deux prix: nous le désignons par $i_{j/o}$ ou $i_{82/60}$ (i minuscule pour un rapport, j/o ou $82/60$ sont des indices au sens II 1^e du **Petit Robert**, le premier désigne l'année courante et le second l'année de base. On lit i, j , zéro ou $i, 82, 60$):

$$i_{j/o} = \frac{104,03}{11,05} = 9,41$$

L'indice cherché est égal à 100 fois ce rapport. Nous utiliserons le i minuscule pour le rapport et le I majuscule pour l'indice:

$$I_{82/60} = 100i_{82/60} = 941,4$$

Quand il s'agit, comme ici, de prix, on dit parfois que le **prix relatif** du beefsteak est 941 en 1982 par rapport à la base 100 en 1960; cela veut dire encore que le

prix de 1982 est 941 fois celui 1960).

Plus généralement on désigne par indice simple d'une grandeur le rapport (exprimé en pourcentage) des valeurs x_j et x_0 prises par cette grandeur à deux dates différentes (notées j et o , o étant l'année de base):

$$I_{j/o} = 100 \frac{x_j}{x_o}$$

alors que l'on conserve toujours la même année de base, par exemple 1949. L'indice relatif à l'année de base est:

$$I_{o/o} = 100 \frac{x_o}{x_o} = 100$$

On dit donc que l'indice a pour base 100 l'année o . Dans la suite de ce texte, le symbole $i_{j/o}$ désigne le rapport des deux valeurs, avant la multiplication par 100. Le symbole $I_{j/o}$ sera réservé à l'indice après cette multiplication:

$$i_{j/o} = \frac{x_j}{x_o},$$

$$I_{j/o} = 100i_{j/o}$$

On peut ainsi calculer l'indice du prix de beefsteak, de base 1960 = 100 pour toutes les dates données ci-dessus, en remplaçant successivement la lettre j par 1965, 1979. On obtient ainsi le tableau d'indices statistiques suivants:

TABLEAU 4
Indice du Prix beefsteak (au kg)

Date	Prix	Indice
1960	11,05	100,0
1965	14,07	127,3
1979	71,88	650,5
1980	76,36	691,0
1982	104,03	941,4

La série des indices simples permet de se rendre compte plus facilement de la croissance que la série des prix: multiplication par 1,3 de 1960 à 1965, par 6,5 de 1960 à 1979 ...

L'utilisation de tels indices facilite la comparaison des croissances. A titre d'exemple, voici plusieurs produits dont on a l'indice de prix 1982, base 1960 = 100:

TABLEAU 5
Prix et indices de prix de plusieurs produits
en 1982, base 100 en 1960
en France

Nº	Produit	Prix		Indice 1982 base 100 en 1960
		1960	1982	
1	1 kg de pain	0,62	7,60	1 225,8
2	1 kg de pommes de terre	0,32	4,15	1 296,9
3	1 kg de beefsteack	11,05	104,03	941,4
4	1 fer à repasser	18,90	129,00	682,5
5	1 ticket de métro (Paris)	0,33	2,03	615,2
6	1 journée d'hôpital	60,00	885,00	1 475,0
7	1 coupe de cheveux (homme)	2,50	26,63	1 065,2

La comparaison des indices 1982 permet de distinguer des produits dont le prix a peu monté depuis 1960: le ticket de métro, le fer à repasser, le kilogramme de beefsteak; d'autres, dont le prix a beaucoup monté: la journée d'hôpital, le kg de pain ou celui de pommes de terre ... Les irrégularités de la hausse des prix sont dues en général à l'inégalité du progrès technique: celui-ci est faible pour les services (dits tertiaires : journée d'hôpital, coupe de cheveux, service du boulanger inclus dans la vente du pain), important pour les produits manufacturés (secondaires : le fer à repasser, auquel on peut assimiler aussi le métro de Paris qui a bénéficié de nombreuses transformations techniques), moyen pour les produits agricoles (primaires).

B. COMPARAISONS DANS L'ESPACE

Choisissons une série, d'ailleurs très bien présentée, dans le Panorámica 1984 du C.A. de Euskadi, celle du nombre de téléphones pour 100 personnes (fig. 13).

100 persona bakoitzeko telefono-kopurua (1981)
Teléfonos por cada 100 personas (1981)

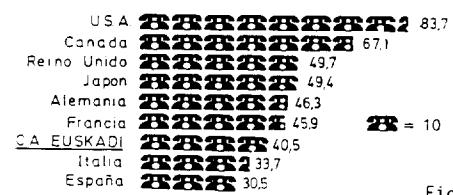


Fig. 13

Sans faire d'aussi jolis dessins (mais aussi avec un résultat moins bon) on peut calculer des indices élémentaires qui peuvent aider les comparaisons. On peut choisir pour base n'importe lequel des pays. Choisissons deux exemples: base 100, le pays basque et base 100, l'Espagne (tableau 6).

Les deux séries d'indices sont, bien entendu, proportionnelles. On y lit, par exemple, que les U.S.A. ont 2,74 fois plus de téléphones par habitant que l'Espagne, ou que le pays basque a un tiers de téléphones de plus que l'ensemble de l'Espagne.

TABLEAU 6

Pays	Nombres	Indice:C.A. Euskadi = 100	Indice: Espagne = 100
U.S.A.	83,7	207	274
Canada	67,1	166	220
Royaume Uni	49,7	123	163
Japon	49,4	122	162
Allemagne	46,3	114	152
France	45,9	113	150
Pays Basque	40,5	100	133
Italie	33,7	83	110
Espagne	30,5	75	100

C. PROPRIETES DES INDICES SIMPLES

Il s'agit de propriétés mathématiques simples en même temps qu'utiles. L'un des drames de la théorie et de l'usage des indices est que ces propriétés, évidentes pour les indices simples, n'existent pas, en général, pour les indices plus complexes dont nous aurons à parler par la suite.

a) Identité

On dit qu'un indice a la propriété d'identité lorsqu'il prend la valeur 100 l'année de base: c'est une propriété déjà signalée, qui peut être traduite par les égalités:

$$i_{0/0} = 1 \text{ et } I_{0/0} = 100$$

b) Réversibilité

Reprendons l'exemple du beefsteak. Nous avons déjà calculé $I_{60/82}$ et $I_{82/60}$. On peut constater que:

$$i_{82/60} = \frac{1}{i_{60/82}} \quad \text{car } 9,414 = \frac{1}{0,106}$$

Cette propriété est générale, pour les indices simples:

$$\begin{aligned} i_{j/o} &= \frac{x_j}{x_o} & i_{o/j} &= \frac{x_o}{x_j} \\ i_{j/o} &= \frac{1}{i_{o/j}} & I_{j/o} &= \frac{10\ 000}{I_{o/j}} \end{aligned}$$

Un indice est réversible si l'on obtient le même résultat numérique en calculant l'indice de la date j par rapport à la date 0 et en calculant l'indice de la date 0 par rapport à la date j et en prenant l'inverse (à un coefficient près).

c) Circularité

L'indice du prix du beefsteak en 1980, sur base 1979 est:

$$I_{80/79} = 100 \frac{P_{80}}{P_{79}} = 100 \frac{76,36}{71,88} = 106,2$$

Pour calculer l'indice de l'année 1980 par rapport à l'année 1960, on peut employer deux méthodes:

- La méthode directe:

$$I_{80/60} = 100 \frac{P_{80}}{P_{60}} = 100 \frac{76,36}{11,05} \approx 691,0$$

- Une méthode indirecte qui permet d'utiliser le résultat de $I_{80/79}$:

$$\frac{1}{100} I_{80/79} \times I_{79/60} = \frac{1}{100} 106,2 \times 650,5 = 691$$

On constate que les deux méthodes donnent le même résultat:

$$I_{80/60} = \frac{1}{100} I_{80/79} + I_{79/60}$$

C'est la propriété de circularité. On dit que l'on peut **enchaîner** les indices simples: l'indice base 1979, $I_{80/79}$ étant enchaîné sur l'indice base 1960, $i_{79/60}$, pour donner l'indice $I_{80/60}$ de base 1960, qui compare les deux extrémités de la chaîne.

Un indice possède la propriété de circularité si les rapports correspondants vérifient la relation:

$$i_{2/0} = i_{2/1} \cdot i_{1/0} \quad (1)$$

0, 1 et 2 étant trois dates ou trois lieux quelconques.

Cette propriété est vérifiée pour les indices simples car:

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0}$$

d) Applications de ces propriétés**1. Changement de base**

Si l'on connaît un indice possédant la propriété de circularité sur une base 0, il est possible de calculer ce même indice sur une autre base t, à partir du premier indice, et de l'indice de la nouvelle base t, par rapport à l'ancienne. 0:

$$i_{j/t} = \frac{i_{j/o}}{i_{t/o}}$$

puisque:

$$i_{j/o} = i_{j/t} \cdot i_{t/o}$$

C'est ainsi que, connaissant l'indice du prix du beefsteak sur base 1960, en 1979: 650,5 et en 1982: 941,4, on peut calculer ce même indice sur la base 1979:

$$I_{82/79} = 100 \frac{I_{82/60}}{I_{79/60}}$$

D'où :

$$I_{82/79} = 100 \frac{941,4}{650,5} = 144,7$$

On dit que les indices simples sont **transférables**: on peut transférer la base de 1960 à 1979 ou de 0 à t. (3).

Les indices des nombres de téléphone par habitants ont été calculés, dans les deux cas, à partir des données brutes; mais il est possible de transférer l'indice de base le pays basque pour obtenir celui qui a pour base l'Espagne. Il suffit de multiplier le premier indice par $40,5/30,5 = 1,3279$ (il se peut qu'il y ait perte de précision mais les résultats sont les mêmes).

2. Enchaînement d'indices successifs

La propriété de circularité peut se généraliser: on peut enchaîner plusieurs indices:

$$i_{3/0} = i_{3/2} \cdot i_{2/1} \cdot i_{1/0} \quad (2)$$

$$i_{j/o} = i_{j/j-1} \cdot i_{j-1/j-2} \cdot \dots \cdot i_{2/1} \cdot i_{1/0} \quad (3)$$

les $i_{5/4}$, $i_{4/3}$, ... sont appelés *chaînons*.

Cela signifie, pour le beefsteak:

$$i_{82/60} = i_{82/80} \times i_{80/79} \times i_{79/65} \times i_{65/60}$$

c'est-à-dire, en développant les rapports:

$$\frac{104,03}{11,05} = \frac{104,03}{76,36} \times \frac{76,36}{71,88} \times \frac{71,88}{14,07} \times \frac{14,07}{11,05}$$

Sous cette forme, il est facile de montrer que cette propriété est valable pour tous les indices élémentaires: on peut enchaîner les indices élémentaires.

3. Raccordements d'indices

D'après le 2^e ci-dessus, il est clair que si l'on a affaire à un indice présentant la propriété de circularité, on peut calculer séparément différents chaînons et les enchaîner, (ou les raccorder) à l'aide de la formule (3).

4. Indice d'une grandeur, produit de deux autres grandeurs

Si une grandeur simple g est le produit de deux autres, h et k, l'indice élémentaire de g est égal au

produit des indices élémentaires h et k. Cette propriété s'applique en particulier à l'égalité:

$$\text{valeur} = \text{prix} \times \text{quantité}$$

Un indice élémentaire de valeur pour un produit donné est le produit de l'indice élémentaire du prix de ce produit par l'indice élémentaire de la quantité de ce produit.

3. NOTION D'INDICE SYNTHÉTIQUE

Jusqu'ici, les seuls indices considérés ont été les indices simples; ces indices ne sont relatifs qu'à une seule grandeur.

Or, pour appréhender une réalité complexe, il faut le plus souvent résumer en un seul plusieurs indices simples (par exemple: les indices de prix de détail, les indices de plusieurs branches de la production industrielle).

On parle alors d'indice **synthétique**, ou indice **d'ensemble** ou indice **global**. C'est ainsi que l'indice synthétique du coût de la vie en France résume les indices élémentaires des prix de 259 postes de dépense.

Dès maintenant, une notion fondamentale doit être annoncée: Il est impossible de résumer d'une façon unique et indiscutable plusieurs indices élémentaires. Ainsi, alors qu'étant donnés deux nombres x_j et x_0 , il existe un seul indice analytique $I_{j/o}$, au contraire, étant donnés deux ou plusieurs indices analytiques, il existe plusieurs indices synthétiques qui tendent à les résumer: chacun a des avantages, mais aussi des inconvénients, par rapport aux autres: aucun n'a tous les avantages, tout le pouvoir d'information, que l'esprit humain désirerait trouver en lui. Il est donc impossible d'affirmer que l'un de ces indices synthétiques est exact, alors que les autres seraient faux. Les différentes résultats et chaque résultat n'a de signification qu'en référence à la formule qui lui a donné naissance.

La plupart des indices synthétiques n'ont pas les propriétés de réversibilité et de circularité. Il en résulte que l'on ne peut pas les enchaîner ni faire un changement de base par simple multiplication par un coefficient.

Pour changer de base un indice synthétique, il faut,

en général, recommencer tout le calcul déjà fait avec la nouvelle base. On ne peut se servir de l'indice calculé avec l'ancienne base.

Il arrive cependant parfois qu'il soit plus facile d'utiliser un indice de base 0 en le ramenant à 100 une autre année, t, par un calcul analogue à celui du transfert (multiplication pas 100 sur l'indice de l'année t). Le calcul ne donne alors pas le même résultat qu'un changement de base (sauf si l'indice est circulaire et réversible). Nous désignerons, dans ce cas, par **origine**, l'année t, et nous dirons qu'on a opéré un *changement d'origine*. L'indice obtenu sera toujours un indice de base 0, mais il sera présenté sur *origine* t.

Dans les paragraphes qui suivent, une revue sera faite des principales méthodes de calcul des indices synthétiques.

4. LES INDICES: MOYENNES SIMPLES

Les premiers indices synthétiques qui vont être étudiés sont des moyennes simples. Le but des indices synthétiques étant de résumer un ensemble d'indices élémentaires, la première solution qui se présente à l'esprit consiste à en faire la moyenne: moyenne arithmétique simple, mais aussi moyenne harmonique ou moyenne géométrique.

Ces indices ont en commun le fait qu'aucune pondération explicite n'apparaît dans les calculs de somme et de moyenne. Mais, les sommes simples sont en fait calculées avec des pondérations implicites, souvent mal connues par le calculateur et dépourvues de sens.

Au paragraphe suivant, nous étudierons des indices calculés à l'aide de pondérations explicites, dont la signification économique est plus grande.

A) LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE

a) Définition

Il sera question ici de la moyenne arithmétique simple des indices élémentaires:

$$A = \frac{\sum_{j=1}^n I_j}{n}$$

Avec les indices simples du tableau 5:

$$A_{82/60} = \frac{\sum_{j=1}^7 I_{60}^j}{7} = \frac{7 \cdot 302,0}{7} = 1\ 043,1$$

On peut dire que la *haute moyenne* du prix des ces 7 produits est mesurée par l'indice 1 043 en 1982 pour 100 en 1960.

b) Avantages de cette formule

- Elle est simple, accessible, connue de tous et a la propriété d'*identité*.

- Elle est parfaitement définie, c'est-à-dire déterminée de façon unique, à partir des indices élémentaires donnés.

- Elle est sensible. On emploie ce mot un peu dans le même sens que pour la sensibilité d'une balance: un indice synthétique est dit sensible s'il suffit qu'un des indices élémentaires change, même peu, pour que l'indice synthétique en soit affecté.

- Elle peut être traitée algébriquement: si l'on fait la moyenne arithmétique de quelques indices élémentaires, il est inutile de refaire tout le calcul pour ajouter ou enlever un indice: on peut, au contraire, ce qui est beaucoup moins long, utiliser les résultats antérieurement acquis.

Par exemple, l'indice des trois produits alimentaires du tableau 5 est:

$$A = \frac{\sum_{j=1}^3 I_{60}^j}{3} = \frac{3 \cdot 464,1}{3} = 1\ 154,6$$

Si on veut tenir compte de l'indice du prix du fer à repasser, on peut partir de ce chiffre $A = 1\ 154,6$.

$$A' = \frac{3A + I_{60}^4}{4} = \frac{3 \cdot 464,1 + 682,5}{4} = 1\ 036,6$$

On obtient le même résultat que si l'on calcule l'indice moyenne arithmétique des indices des 4 premiers produits, sans se servir de A.

- Elle a, dans une certaine mesure un sens économique, lié aux pondérations implicites de la moyenne que nous allons préciser:

L'indice est en général calculé, non pour la seule année 1982, mais pour toutes les années de 1960 à aujourd'hui. Or, pour un indice de prix, quelle que soit l'année, on compare dans le temps le prix des mêmes quantités physiques de chaque produit. Ce sont les quantités qui coûtaient 100 F l'année de base. En effet, pour une année courante i, et n produits:

$$A_{i/o} = \frac{\sum I_{i/o}^j}{n} = \frac{100}{n} \sum_{j=1}^n \frac{p_i^j}{p_0^j}$$

ce qui peut s'écrire:

$$A_{i/o} = 100 \frac{\sum_j \frac{1}{p_0^j} p_i^j}{\sum_j \frac{1}{p_0^j}}$$

La moyenne arithmétique est écrite ici sous la forme du rapport de deux sommes pondérées de prix: les prix de l'année courante au numérateur, ceux de l'année de base au dénominateur. Les pondérations sont les inverses des prix de l'année de base: $100/p_0^j$ pour le prix de l'article j, c'est-à-dire la quantité du produit j qui valait 100 F l'année de base. Ce sont les **pondérations implicites** de cet indice.

C'est ainsi que, dans la moyenne A ci-dessus, ont été comparés, en 1982 et en 1960, les prix de:

100 F de pain	soit $\frac{100}{0,62}$ kg ou 161,29 kg;
100 F de pommes de terre	soit $\frac{100}{0,32}$ kg ou 312,5 kg;
100 F de beefsteack	soit $\frac{100}{11,05}$ kg ou 9,05 kg.

Ces quantités physiques d'aliments forment ce qu'on appelle souvent un *panier de provisions* ou un *panier de consommation*, ou encore un *budget de dépenses*. Si l'on calcule la moyenne arithmétique simple, base 1960, pour une autre année, par exemple 1979, ce sont les mêmes quantités physiques de chaque produit (161,3 kg de pain, etc.) qui sont comparées. L'indice étudié ici suit dans le temps les variations de prix d'un panier fixe.

Avec les indices de Laspeyres et de Paasche, d'autres indices seront présentés, pour lesquels les paniers de provision correspondront à une consommation observée,

alors qu'ici ils sont arbitraires. En effet, que signifie prendre 100 F de chaque article? Cela dépend uniquement des prix: un article bon marché est pris en considération pour une quantité physique (volume, poids, surface ...) plus grande qu'un article cher, et cela n'a rien à voir avec une consommation observée. Le budget de dépenses de la moyenne arithmétique simple peut cependant avoir un sens économique raisonnable, si les articles sont convenablement choisis. En effet, si le choix des articles est bien conduit, le résultat peut n'être pas très différent de celui qu'on obtiendrait avec des indices pondérés (Cf. paragraphe 4).

On pourrait transposer ce qui vient d'être dit à des indices de quantité, ou à tout autre indice.

c) Inconvénients de cette formule

La moyenne arithmétique a cependant deux inconvénients graves, le premier d'ordre économique, l'autre d'ordre statistique:

- Il suffit de regarder le panier de provisions ci-dessus, pour voir que l'importance de chaque produit dans l'indice est inversement proportionnelle à son prix de l'année de base: s'il se trouve ensuite que, dans la période étudiée, les pommes de terre, qui étaient bon marché en 1960, montent fortement, la variation de leur prix va affecter beaucoup l'indice (Or, il se trouve justement que l'indice élémentaire de la pomme de terre est l'un des plus élevés du tableau en 1982).

Dans une période d'inflation, comme la période actuelle, tous les prix montent or, la moyenne arithmétique donne aux prix qui montent vite une plus grosse importance qu'à ceux qui montent lentement: si le prix d'un article augmente d'un quart, pendant que celui d'un autre double, l'indice de ces deux articles devient:

$$\frac{125 + 200}{2} = 162,5$$

La part du second article dans l'indice est presque deux fois plus grande que celle du premier.

A. Julin (4) conclut en disant: Ce genre de moyenne exagère la portée d'une hausse générale et sous-évalue une chute générale des prix.

- Pour changer de base (5), il nécessite de refaire tout le calcul. L'indice synthétique, moyenne arithmétique simple, n'a pas la propriété de réversibilité. En ef-

fet, il a été calculé sur les indices du tableau 5.

$$A_{82/60} = 1\ 043,1$$

Si l'indice était réversible, on pourrait calculer l'indice base 1982 par:

$$\frac{10^4}{A_{82/60}} = \frac{10^4}{1\ 043,1} = 9,6$$

Ce calcul n'est pas sans valeur: on dit qu'on a mis l'indice de base 1960 sur origine 1982 = 100. Mais le résultat est différent de celui que donne le calcul direct sur la base 1982:

$$A_{60/82} = \frac{73,6}{7} = 10,5$$

- La moyenne arithmétique n'est pas réversible. Un exemple de Pierson (6), cité par Lucien March (7) et revu par Jean Fourastié permet de voir la gravité de ce défaut:

TABLEAU 7

**Moyennes arithmétiques de bases différentes
(A étant l'indice moyenne arithmétique)**

Année	Prix		Indices, base 1900			Indices, base 1915		
	Blé	Caoutchouc	Blé	Caoutchouc	A	Blé	Caoutchouc	A
1900	20	20	100	100	100	50	200	125
1915	40	10	200	50	125	100	100	100

On trouve avec la base 100 en 1900 que les prix globaux ont monté de 25% entre 1900 et 1915, et avec la base 100 en 1915 qu'ils ont baissé de 25% entre ces deux dates! Cette contradiction tient à ce que les poids retenus dans les comparaisons correspondent à des budgets absolument différents; on a affaire non, comme on pourrait le croire, à un même indice qui serait lu dans les deux sens, mais à deux indices différents.

Avec la base 100 en 1900, les quantités sont 5 kg de blé et 5 kg de caoutchouc qui valent chacune 100 F en 1900. Avec la base 100 en 1915, le 2^e indice sert à comparer les prix de 2,5 kg de blé et de 10 kg de caoutchouc. Il est normal que l'indice de base 1900, qui fait intervenir beaucoup de blé, monte, tandis que l'indice de base 1915 dans lequel le mouvement du prix du caoutchouc l'emporte sur celui du blé, baisse.

Cette exemple permettra, nous l'espérons, au lecteur de comprendre la distinction déjà notée entre *base* et *origine*. Les deux indices moyennes arithmétiques simples, de bases différentes, sont deux indices différents.

Par contre, on peut mettre l'indice de base 1915 sur origine 1900: on trouve 80 en 1915 (et bien sûr, 100 en 1900!). Sur cette origine, l'indice base 1915 est plus facile à comparer à l'indice base 1900.

Cette impossibilité de changer de base sans refaire tout le calcul a évidemment pour conséquence la **non-circularité**:

$$A_{2/0} \neq A_{2/1} \cdot A_{1/0}$$

B. LA MOYENNE HARMONIQUE

La moyenne harmonique ne présente pas les mêmes avantages en soi que la moyenne arithmétique, puisqu'elle est loin d'être simple et connue de tous. Elle ne sera donc définie ici que très rapidement.

a) Définition

La moyenne harmonique de plusieurs nombres est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses de ces nombres:

$$\frac{1}{H_{1/0}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{I_j}$$

Par exemple, en prenant toujours les trois premiers articles du tableau 5.

$$H_{82/60} = \frac{3}{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{I_j}} = \frac{3}{\frac{1}{1225,8} + \frac{1}{1296,9} + \frac{1}{941,4}} = 1132,5$$

b) L'intérêt essentiel de la moyenne harmonique est d'être identique à la moyenne arithmétique, calculée en remontant le temps, c'est-à-dire sur base l'année 1, mais en prenant pour origine le début de la période.

En effet:

$$A_{0/i} = \frac{1}{n} \sum_j \frac{10^4}{I_{i/0}^j}$$

Si l'on calcule cette moyenne arithmétique sur origine 0, on obtient:

$$\frac{1}{A_{0/i}} = \frac{n}{10^4 \sum_j \frac{1}{I_{i/0}^j}} = H_{i/0}$$

Vérifions-le sur l'exemple précédent. Pour obtenir $H_{60/82}$ calculons les indices élémentaires sur base 100 en 1982, et utilisons leurs inverses

$$H_{60/82} = \frac{3}{\frac{1}{8,16} + \frac{1}{7,71} + \frac{1}{10,62}} = \frac{3}{0,346} = 8,66$$

Or, si l'on calcule la moyenne arithmétique trouvée ci-dessus, sur origine 1960, on obtient bien:

$$\frac{10000}{1154,7} = 8,66$$

La moyenne harmonique a donc les mêmes avantages et les mêmes inconvénients que la moyenne arithmétique.

Sans reprendre tout ce qui a été dit plus haut à propos de la moyenne arithmétique, disons un mot de l'aspect économique. Puisqu'il s'agit de l'inverse d'une moyenne arithmétique, la moyenne harmonique compare également dans le temps des quantités physiques identiques des articles considérés, aux années 0 et j. Mais cette fois, ces quantités physiques représentent ce qui coûtait 100 F, l'année j (année courante) et non l'année de base: le budget considéré change donc chaque année. En effet:

$$H_{1/0} = 100 \frac{\frac{1}{p_1^j}}{\frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{p_0^j}{p_1^j}}} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_1^j}}{\sum_{j=1}^n \frac{p_0^j}{p_1^j}} \times 100$$

La moyenne harmonique se présente comme le rapport de deux sommes pondérées, les pondérations étant les mêmes au numérateur et au dénominateur: les coefficients $1/p_1^j$ sont inversement proportionnels aux prix de l'année courante. Contrairement à la moyenne arithmétique, la moyenne harmonique exagère la baisse et sous-évalue la hausse du niveau des prix (8).

C) LA MOYENNE GEOMETRIQUE

La moyenne arithmétique et la moyenne harmonique présentent un certain nombre d'inconvénients; en particulier elles ne possèdent pas la propriété de circularité: il est incorrect de faire sur ces moyennes des changements de base ou des raccords; si l'on opère sur elles des changements d'origine, il faut prendre soin de distinguer explicitement l'origine de la base.

Un autre inconvénient est que la moyenne arithmétique exagère la portée d'une hausse générale des indices, et sous-évalue celle d'une baisse générale; la moyenne harmonique a la tendance inverse. C'est pourquoi la moyenne géométrique, qui ne présente pas ces inconvénients, a été parfois retenue pour les calculs d'indices synthétiques.

a) Définition

La moyenne géométrique est la racine n-ième du produit des n nombres dont on cherche la moyenne:

$$G_{1/0} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n I_j^{1/0}} = \left(\prod_{j=1}^n I_j^{1/0} \right)^{1/n}$$

Remarquons qu'elle est le rapport des moyennes géométriques simples des grandeurs aux deux époques:

$$G_{1/0} = \frac{\sqrt[n]{\prod_j x_j^j}}{\sqrt[n]{\prod_j x_0^j}}$$

Par exemple, avec les trois premiers indices du tableau 5.

$$G_{82/60} = \left(\prod_{j=1}^3 I_j^{1/0} \right)^{1/3} = (1\ 225,8 \times 1\ 296,9 \times 941,4)^{1/3}$$

d'où:

$$G = 1\ 143,8$$

b) Avantages

- La moyenne géométrique est parfaitement définie, déterminée de façon unique et elle a la propriété d'identité.

- Elle est sensible.

- Elle peut être traitée algébriquement : si on veut ajouter un quatrième indice aux trois précédents, on a :

$$G'_{82/60} = \sqrt[4]{\prod_{j=1}^4 I_j^{1/0}} = (G^3 \times 682,5)^{1/4} = 1\ 005,3$$

On trouve le même indice en utilisant la moyenne déjà calculée qu'en traitant directement les 4 indices.

- Elle satisfait à la condition de circularité.

En effet:

$$G_{2/0} = G_{2/1} \cdot G_{1/0}$$

puisque:

$$\frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j^j}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_0^j}} = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_2^j}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_1^j}} \times \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_1^j}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_0^j}}$$

Donc la moyenne géométrique est réversible, et on peut opérer sur elle des changements de base sans refaire tous les calculs: ici changer d'origine revient identiquement à changer de base. C'est une propriété utile que n'avaient pas les autres moyennes déjà étudiées.

- Elle ne présente pas la même dissymétrie que la moyenne arithmétique.

Citons M. Olivier décrivant les causes de distorsion qui se produisent dans le calcul d'une moyenne arithmétique (9): Les prix à l'époque que l'on étudie sont comparés aux prix correspondants de l'époque de base, que l'on prend égaux à 100. Toute augmentation d'un prix, supérieure à 100% ne peut être compensée arithmétiquement par la diminution d'un seul prix, puisqu'un prix ne peut être négatif ... Il est une forme de moyenne qui n'introduirait pas cette dissymétrie, c'est la moyenne géométrique. En effet, n'importe quel écart en plus peut être compensé géométriquement par un écart en moins et inversement: un prix relatif qui est n fois plus grand que la moyenne est compensé géométriquement par un prix relatif qui est n fois plus petit que la moyenne".

c) Inconvénients de la moyenne géométrique

- Elle n'a pas de signification économique

Il est impossible de trouver, comme il a été fait pour les indices précédents, un panier de consommation dont la moyenne géométrique suivrait les variations.

Certains auteurs avaient pensé que les prix se répartissaient au hasard autour d'un indice monétaire. L'argument cité ci-dessus d'après M. Olivier montre qu'il est impossible qu'il existe une répartition au hasard autour de la moyenne arithmétique. Ces auteurs supposaient que les logarithmes des indices de prix se repartaient au hasard autour de la moyenne géométrique (autrement dit, que les indices de prix suivaient une loi de Galton, ou que leurs logarithmes suivaient

une loi de Gauss). Depuis longtemps, cette hypothèse n'est plus soutenue, F. Divisia (1926) a montré qu'elle ne serait vérifiée que si tous les prix étaient indépendants; tous les prix dépendent les uns des autres, et précisément par l'intermédiaire de la monnaie, car la somme d'argent qu'un individu affecte à certains achats, il ne peut l'affecter à d'autres (10). Les prix dépendent également les uns des autres par les coûts de production qui sont affectés de façon variable par le progrès technique.

- La moyenne géométrique n'est pas simple, et en tous cas peu familière. Or un indice, pour être utilisable par tous, doit être compréhensible pour tous.

- Elle n'est pas d'un calcul très facile, puisqu'il faut utiliser les logarithmes ou des calculatrices capables d'utiliser la notation exponentielle (pour ne pas avoir de dépassement de capacité) et possédant une touche y^x .

D. RELATIONS ENTRE LES TROIS MOYENNES

On démontre qu'il existe une relation d'inégalité toujours vérifiée entre ces trois moyennes:

$$H \leq G \leq A$$

Dans le cas des trois articles qui ont été choisis comme exemple tout au long de ce paragraphe, les résultats sont:

$$H = 1\ 132,5 \quad G = 1\ 143,8 \quad A = 1\ 154,7$$

et vérifient bien cette inégalité.

Quand les indices élémentaires sont dispersés (ce qui est fréquent sur longue période), il arrive souvent que des divergences importantes apparaissent entre les indices synthétiques calculés selon ces trois formules. Le problème est alors de choisir: l'une de ces formules est-elle la meilleure?

On se trouve devant le fameux problème de Florence posé par Galilée: si un cheval vaut 100 couronnes, et que deux personnes estiment sa valeur, l'une à 10 coronnes, l'autre à 1 000, ces deux estimations sont-elles également erronées? Sinon, laquelle des deux est la plus erronée? Les tenants de la moyenne arithmétique (Nozzolini) déclaraient que l'estimation de 1 000 était plus fausse que l'autre: elle comporte un gain de 900 couronnes, contre une perte de 90 couronnes seulement pour l'estimation de 10.

Ceux qui préféraient la moyenne géométrique (Castelli et Galilée) soutenaient au contraire que les deux estimations étaient également erronées, puisque de l'ordre d'une multiplication ou d'une division par le même nombre 10.

Sous cette forme, la question du choix de la moyenne reste posée. Des arguments mathématiques sont en faveur de la moyenne géométrique; des arguments économiques seraient plutôt en faveur de la moyenne arithmétique. Dans la pratique, on utilise rarement la moyenne géométrique, car toutes ses qualités mathématiques ne compensent pas son grave défaut économique, qui est de n'avoir pas de signification concrète (relativement à des quantités physiques, un panier de provision).

4. INDICES DE LASPEYRES ET DE PAASCHE

Le paragraphe précédent a montré l'intérêt économique de la moyenne arithmétique et de la moyenne harmonique, puisqu'elles permettent de comparer dans le temps des budgets de consommation. Mais ces budgets restaient imparfaits et sans rapport avec des consommations réelles; de plus, ils étaient implicites et donc, en général, inconnus des utilisateurs. Les indices de Laspeyres et de Paasche sont au contraire des indices pondérés explicitement, ce qui permet de se référer à des paniers de consommation voisins de la réalité à décrire: leur valeur économique est donc grande; ils sont d'ailleurs très usités pour les calculs d'indices nationaux dans tous les pays.

A. DEFINITION

a) Indice de Laspeyres

Dans l'indice de Laspeyres interviennent des pondérations fixes, dépendant de l'importance observée de chaque grandeur au cours de l'année de base:

$$L_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n a_0^j x_i^j}{\sum_{j=1}^n a_0^j x_0^j} \times 100$$

Les a_0^j sont des coefficients fixes, liés à l'époque de base.

- C'est ainsi que l'indice de Laspeyres des prix compare dans le temps les variations du prix d'un panier de consommation fixe, c'est-à-dire qu'il décrit, d'année en année, l'évolution du coût total d'un ensemble con-

cet, bien défini et fixe de consommations (produits et services):

$$L_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n q_o^j p_i^j}{\sum_{j=1}^n q_o^j p_o^j} \times 100$$

q_o^j étant la quantité de l'article j , l'année de base, p_i^j le prix de cet article l'année i et p_o^j le prix de cet article l'année de base.

Calculons l'indice de Laspeyres des prix des trois premiers articles du tableau 5. Dans l'indice des prix à la consommation, on peut choisir des pondérations proportionnelles aux postes boulangerie, viande de boeuf et légumes, ce qui revient à compter, par exemple, un gâteau pour plusieurs kilogrammes de pain, ou un kg de plats de côtes pour une partie d'un kg de beefsteak ... On obtient à partir des pondérations de l'indice des 250 articles, valables en 1960:

23 kg de pain; 87 kg de pommes de terre et 2,3 kg de beefsteak:

L'indice de Laspeyres est alors:

$$L_{82/60} = \frac{23 \times 7,6 + 87 \times 4,15 + 2,3 \times 104,03}{23 \times 0,62 + 87 \times 0,32 + 2,3 \times 11,05} \times 100 = 1148$$

On peut aussi écrire la formule de l'indice de Laspeyres sous la forme d'une **moyenne arithmétique des indices élémentaires**:

$$L_{i/o} = 100 \times \frac{\sum_{j=1}^n p_o^j q_o^j \frac{p_i^j}{p_o^j}}{\sum_{j=1}^n p_o^j q_o^j} = \sum_{j=1}^n \alpha_o^j I_{i/o}^j$$

$$\text{avec: } \alpha_o^j = \frac{p_o^j q_o^j}{\sum_{j=1}^n p_o^j q_o^j} \times 100 \text{ et: } \sum_j \alpha_o^j = 100$$

Les coefficients α_o^j représentent la part relative de chaque produit dans la dépense correspondant au panier de consommation de l'année de base.

Sous cette forme, ce ne sont plus les quantités physiques relatives à chaque produit qui interviennent, mais les valeurs correspondantes. C'est ainsi que, dans l'exemple précédent, les *importances relatives*, en pourcentage, du beefsteak, des côtes et du cheval haché sont (11):

21,1 pour le pain; 41,2 pour les pommes de terre; 37,7 pour le beefsteak.

Une deuxième manière de calculer l'indice de Laspeyres est alors d'effectuer une moyenne pondérée des indices élémentaires 82/60:

$$L_{82/60} = \frac{21,1 \times 1225,8 + 41,2 \times 1296,9 + 37,7 \times 941,4}{100} = 1148$$

Le résultat est le même que ci-dessous aux erreurs d'arrondis près.

C'est selon la formule de Laspeyres que sont souvent calculés les indices des prix de détail (c'était le cas en France jusqu'en 1970) et les indices de prix de gros.

-De même, il existe un **indice de Laspeyres des quantités**, pondéré par des prix fixes; il donne le rapport de deux productions, ou de deux dépenses résultant de changements dans les quantités consommées, si les prix avaient été ceux de l'année de base pendant toute la période:

$$L_{1/o} = \frac{\sum_{j=1}^n p_o^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n p_o^j q_o^j}$$

Ce qui s'écrit encore, en mettant en évidence les importances relatives de chaque produit:

$$L_{1/o} = \frac{\sum_{j=1}^n p_o^j q_o^j \frac{q_1^j}{q_o^j}}{\sum_{j=1}^n p_o^j q_o^j}$$

C'est selon la formule de Laspeyres que sont calculés beaucoup d'indices de quantités, par exemple la plupart des indices de la production industrielle (les pondérations sont les valeurs de l'année de base).

b) Indice de Paasche

L'indice de Paasche est pondéré par des coefficients qui dépendent cette fois de l'année courante i :

$$P_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n a_i^j x_i^j}{\sum_{j=1}^n a_i^j x_o^j} \times 100$$

Les a_i^j étant des coefficients liés à l'année courante pour chaque date où cet indice est calculé, les coefficients sont en général différents.

- L'indice de Paasche des prix compare des paniers de consommation variables avec l'année de calcul. Le coût de chacun de ces budgets est rapporté au coût du même budget l'année de base.

$$P_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n q_i^j p_i^j}{\sum_{j=1}^n q_i^j p_o^j} \times 100$$

(q_i^j étant la quantité du j -ième article qui est consommée à la date i).

Supposons que les quantités en 1982 des trois produits de notre exemple soient: 37 kg de pain, 73 kg de pommes de terre, 3,3 kg de beefsteak (ces quantités ont été calculées à l'aide de l'indice des prix à la consommation, pondérations 1982). L'indice de Paasche, base 1960, pour l'année 1982, donc calculé avec les quantités de 1982, est alors:

$$P_{82/60} = \frac{37 \times 7,60 + 73 \times 4,15 + 3,3 \times 104,03}{37 \times 0,62 + 73 \times 0,32 + 3,3 \times 11,05} \times 100 = \\ = 120,6$$

On trouve un indice de Paasche inférieur de 2% à l'indice de Laspeyres calculé avec les mêmes éléments. Ceci s'explique par le fait que la part du beefsteak, dont le prix a moins monté, est plus grande en 1982 qu'en 1960.

On aurait pu donner, au lieu des quantités physiques, les importances relatives de chaque produit, l'année courante:

$$P_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j}{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j - \frac{p_o^j}{p_i^j}} \times 100$$

ou:

$$\frac{1}{P_{i/o}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j - \frac{1}{I_{i/o}^j}}{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j} = \sum_j \alpha_i^j \frac{1}{I_{i/o}^j}$$

L'indice de Paasche se présente comme une moyenne harmonique pondérée d'indices élémentaires, avec des coefficients α_i^j calculés comme pour l'indice de Laspeyres.

Reprendons l'exemple des trois produits alimentaires. Les pondérations 1982 peuvent être calculées comme ci-dessus celles de 1960. On trouve: 27,7% pour le pain; 28,2% pour les pommes de terre et 44,1% pour le beefsteak. On peut calculer l'indice de Paasche à l'aide de ces pondérations.

b) De même, on définit un indice de Paasche des quantités:

$$P_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j}{\sum_{j=1}^n p_i^j q_o^j}$$

Les valeurs des quantités sont comparées à prix constants, les prix étant ceux de l'année courante.

c) Indice de valeur

Les indices synthétiques n'ont pas la propriété que l'indice d'une grandeur produit de deux autres soit égal au produit des indices de ces deux autres grandeurs. Cependant, on peut définir un indice de valeur:

$$V_{i/o} = L_{i/o}(p) \cdot P_{i/o}(q) = L_{i/o}(q) \cdot P_{i/o}(p)$$

en désignant par $L(p)$ les indices de Laspeyres des prix et des quantités et par $P(p)$ et $P(q)$ les indices de Paasche des prix et des quantités. Dans les deux cas:

$$V_{i/o} = \frac{\sum_j q_j^j p_i}{\sum_j q_0^j p_j}$$

B. AVANTAGES DES INDICES DE LASPEYRES ET DE PAASCHE

1. Les deux formules sont simples et faciles à comprendre; elles possèdent la propriété d'identité.

2. Elles sont parfaitement définies.

3. Elles sont sensibles.

4. Ces formules peuvent être traitées algébriquement lorsqu'elles sont sous forme de moyennes d'indices. Vérifions-le sur l'indice de Laspeyres, base 1960, en ajoutant aux trois articles alimentaires (tableau 5), 14% de tickets de métro (représentatifs des dépenses de transport public). Si l'on se sert de l'indice déjà calculé, on peut le considérer comme un seul indice, de pondération 100; on calcule la moyenne pondérée de cet indice du ticket de métro.

$$L'_{82/60} = \frac{100 L_{82/60} + 14 \times 615,2}{100 + 14} \times 100 = 1\ 082,6$$

On trouve le même résultat que si l'on calcule directement l'indice de Laspeyres des 4 articles. Il en résulte que ces indices possèdent la propriété d'agrégation: l'indice de Laspeyres d'un ensemble de grandeurs est égal à l'indice de Laspeyres des indices de Paasche. Cette propriété est d'un grand avantage pour les calculs, car la plupart des indices élaborés selon ces formules peuvent être publiés non seulement sous forme d'indice global, mais aussi sous forme d'indices de groupes et de sous-groupes. A partir des indices de groupes et de sous-groupes, on peut calculer l'indice global. C'est le cas en particulier pour les indices de prix (de gros et de détail) et pour l'indice de la production industrielle en France.

5. L'avantage essentiel de ces indices est leur signification économique:

- L'indice de Laspeyres compare dans le temps des sommes dont les pondérations sont fixes. Pour prendre l'exemple le plus usuel des indices de prix, l'indice de Laspeyres peut suivre à travers le temps les variations

du coût d'un budget fixe.

Des indices de base ancienne et de base récente divergent souvent sur longue période. En effet, il s'agit toujours du coût de provision fixe, mais ce panier fixe n'est pas le même dans le cas de la base ancienne que dans le cas de la base récente: l'indice est construit sur des budgets de dépenses concrets, effectivement observés au cours de l'année de base. Ainsi, dans le premier cas, on considère un *homo oeconomicus* qui a gardé les habitudes de la période de base, donc une consommation moins riche et moins variée que des hommes nés plus tard et vivant dans une société à niveau de vie moyen plus élevé. On peut penser que dans l'ensemble ce budget ancien doit donner du coût de la vie une image plus fortement croissante qu'un budget récent. En effet, dans le second cas, l'*homo oeconomicus novus* dont l'indice traduit les impressions voudra, au contraire, connaître ce que lui aurait coûté son budget récent, riche et varié, dans une période plus ancienne: certains articles de consommation courante en 1985 étaient fort rares en 1850 et donc fort chers! Le coût de la vie semblera donc avoir beaucoup moins monté que dans le premier cas.

Toutefois - et ceci fera apparaître les difficultés et les nuances qui se rencontrent sans cesse dans de tels raisonnements - il peut se faire que ce soit le contraire qui se produise. D'abord, on se heurte le plus souvent, dans le cas de budgets récents, non à la hausse relative mais à l'absence totale du prix de certains articles dans le passé, souvent même à l'inexistence de l'article (réfrigérateurs, télévisions, machines électroniques); ensuite, le budget ancien peut être composé d'articles si peu influencés par le progrès technique qu'ils sont aujourd'hui non pas très bon marché, mais très chers (sarrasin, sabots, lampes à huile, parchemin ...); dans ce cas les progrès du niveau de vie se sont faits par substitution de produits nouveaux aux produits anciens. Seules de telles substitutions pourraient traduire en indice la réalité; mais elles sont fort délicates et même dangereuses à manier.

Toute personne dont le budget est indexé sur un indice de Laspeyres peut, à chaque époque, acquérir le budget qui avait été choisi l'année de base; mieux encore, elle peut par substitution obtenir des consommations plus élevées ou qui lui paraissent préférables.

- L'indice de Paasche se réfère à des paniers de consommation variables avec le temps. Il permet de suivre l'évolution des consommations en même temps que celle des prix. Mais il est parfois difficile de distinguer dans ses variations ce qui est à attribuer au changement de la

structure de consommation et ce qui est à attribuer aux changements de prix.

- La différence fondamentale entre les séries Laspeyres et les séries Paasche découle du contenu physique des paniers de provision. Tout dépend de la façon dont la consommation du ménage évolue. Il est donc difficile de dire lequel des deux indices a la variation la plus favorable au consommateur:

Très souvent, une indexation sur un indice de Laspeyres lui sera plus favorable qu'une indexation sur un indice de Paasche. En effet (12) une indexation sur l'indice de Laspeyres permet d'acquérir toujours les mêmes quantités des mêmes articles. Il est vraisemblable toutefois que le consommateur procédera à certains substitutions dans ses achats lorsque des variations surviendront dans les prix relatifs; le panier qu'il acquerra ainsi sera plus satisfaisant pour lui que l'ancien. Par contre, une indexation sur un indice de Paasche lui sera souvent moins favorable. Reproduisons ici le dialogue entre l'indice de Paasche et la ménagère, de M.P. Mouchez:

Si les indices parlaient l'indice de Paasche dirait à la ménagère: vous vous plaignez de la hausse des prix, mais ceux-ci n'ont pas augmenté autant que vous le croyez. Les prix, déjà, étaient élevés au regard de votre revenu dans la situation de base: voyez comme mon dénominateur est grand! A quoi la ménagère répondrait avec pertinence: Les prix des marchandises dont je faisais alors l'acquisition n'étaient pas aussi élevés que ne l'indique votre dénominateur calculé sur la base de mes acquisitions actuelles; j'organisais mes achats en fonction du système de prix qui existait à cette époque, et j'étais, substitutions faites, plus satisfaite que vous ne semblez le croire.

Donnons un exemple particulièrement favorable. Supposons que nous calculions les deux indices sur base 1900, date à laquelle l'électricité, au lieu d'observation, avait commencé à pouvoir être distribuée. Supposons encore qu'en 1920 le prix de l'électricité devienne plus faible que celui des autres produits d'éclairage. Le budget de l'indice de Laspeyres, basé sur la consommation usuelle en 1900, ne contiendra pas d'électricité, mais, par exemple, du pétrole. Cela n'empêchera pas le consommateur dont le revenu sera indexé selon l'indice de Laspeyres d'utiliser, en 1920, l'électricité, ce qui lui permettra soit d'augmenter son éclairage, soit d'utiliser son revenu à autre chose. Par contre, l'indice de Paasche sera calculé en 1920 sur un panier compre-

nant de l'électricité; celle-ci étant beaucoup plus chère en 1900 que le pétrole, l'indice de Paasche sera, de ce fait, plus faible que le Laspeyres; le revenu du consommateur indexé sur un Paasche sera plus faible que le revenu indexé sur un Laspeyre. Le jeu des substitutions sera défavorable au consommateur dont le revenu est indexé sur l'indice de Paasche.

Mais cela ne se produit pas toujours, puisque, comme il a été dit, tout dépend des paniers de consommation. Supposons qu'un indice de Laspeyres, de base ancienne, soit calculé sur un budget contenant une grande quantité de pain. Le pain ayant relativement plus baissé que les autres aliments pendant la période d'étude, le consommateur dont le revenu suit l'indice de Laspeyres ne pourra guère substituer au pain d'autres articles plus désirables. Par contre le panier de l'indice de Paasche comprendra de moins de pain, et de plus d'autres produits dont les prix ont monté davantage. Le consommateur dont le revenu suivra cet indice pourra donc acquérir ces autres la plus favorable au consommateur.

6. Le calcul de l'indice de Laspeyres est aisément déterminées les pondérations. Cette détermination exige en général une enquête difficile, mais elle n'est nécessaire que pour l'année de base.

Par contre, pour l'indice de Paasche, il faut déterminer les budgets de consommation pour chaque année de calcul, ce qui est coûteux et difficile. Pratiquement, il est presque impossible de reconstituer de tels budgets pour la consommation du même type de ménage. A cause de cela, l'indice de Paasche est rarement employé.

C. INCONVENIENTS DES FORMULES DE LASPEYRES ET DE PAASCHE

1. Elles n'ont pas la propriété de circularité, et ne sont pas réversibles.

2. Il en résulte qu'il est impossible de changer de base, sans refaire tous les calculs. Ceci constitue un inconvénient sérieux pour les utilisateurs.

En ce qui concerne l'indice de Laspeyres, on peut être lui aussi considéré comme un indice de Laspeyres, mais avec des pondérations différentes de celles de l'année de base, pondérations implicites et souvent inattendues. Par exemple, un indice de base 1960, calculé sur origine 1950, peut être considéré comme un Laspeyres de base 1950, mais avec des pondérations qui n'ont rien à voir avec la consommation effective en 1950 (13).

Voyons, par exemple, ce qui arrive quand l'indice du coût de la vie est un indice de Laspeyres, base 1980, et que l'on désire connaître la progression du coût de la vie de 1982 à 1983. Les indices de Laspeyres sont:

$$L_{2/0} = \frac{\sum_j q_0^j p_2^j}{\sum_j q_0^j p_0^j} \times 100$$

$$L_{3/0} = \frac{\sum_j q_0^j p_3^j}{\sum_j q_0^j p_0^j} \times 100$$

et l'on calcule l'indice sur origine 1982 (en glissement):

$$100 \frac{L_{3/0}}{L_{2/0}} = \frac{\sum_j q_0^j p_3^j}{\sum_j q_0^j p_2^j} \times 100 = \frac{\sum_j q_0^j p_2^j \frac{p_3^j}{p_2^j}}{\sum_j q_0^j p_2^j}$$

Il s'agit d'un nouvel indice de Laspeyres, de base cette fois 1982, dont les pondérations sont $q_0^j p_2^j$, c'est-à-dire des coefficients budgétaires dont les quantités sont celles de l'ancienne base et les prix ceux de l'origine nouvelle. Tout se passe comme si l'indice de Laspeyres tenait compte automatiquement de la déformation que les mouvements de prix ont fait subir aux pondérations de l'année précédent. (14)

3. Pour l'une comme pour l'autre de ces deux formules, un problème se pose quand on veut calculer un indice sur longue période: il faudrait avoir des séries de prix suivies sur toute cette période. En effet, qu'il s'agisse d'un Paasche ou d'un Laspeyres. Il est nécessaire que les mêmes articles figurent au numérateur (prix de l'année courante) et au dénominateur (prix de l'année de base). Dans la pratique, ceci est difficile, parfois même impossible, car certains articles n'apparaissent qu'à partir d'une certaine date (kilowatt-heure d'électricité, réfrigérateur, magnétoscope ...) d'autres au contraire disparaissent de l'usage courant (lampes à huile, rouets, ...). On procède alors le plus souvent à des substitutions d'articles: remplacer l'huile des lampes par l'électricité ou inversement; mais l'équivalence n'est pas simple à faire.

On se contente alors en général d'enregistrer les disparitions, et, soit de calculer certains années des indices portant sur un plus petit nombre d'articles, soit de reconstituer la pondération en attribuant aux articles connus d'un groupe ou d'un sous-groupe les pondérations de l'ensemble de ce groupe ou de ce sous-groupe (articles inconnus ou disparus compris). Cette dernière méthode revient à supposer que les articles inconnus auraient vu leur prix évoluer comme le groupe ou le sous-groupe dont ils font partie.

4. L'indice de Paasche a le défaut de nécessiter la connaissance de budgets de consommation pour chaque année de calcul.

D. RELATIONS ENTRE LES INDICES DE LASPEYRES ET DE PAASCHE

1. Il est fréquent que l'indice de Paasche soit inférieur à l'indice de Laspeyres.

2. Aucune des deux formules n'est reversible.

On peut cependant remarquer que:

$$P_{i/o} = \frac{1}{L_{o/i}}$$

3. Les moyennes arithmétiques et harmoniques sont de cas particuliers des indices de Laspeyres et de Paasche.

Nous avons constaté que l'indice de Laspeyres est une moyenne arithmétique pondérée d'indices élémentaires et que l'indice de Paasche est une moyenne harmonique pondérée d'indices élémentaires. Nous pouvons alors considérer les indices moyenne arithmétique et moyenne harmonique simple comme des cas particuliers des indices de Laspeyres et de Paasche, cas où les coefficients de pondération sont tous égaux à 1.

De toutes façons, pour comprendre la signification d'un indice, il convient de s'intéresser toujours aux pondérations.

4. Pratique de ces indices.

Dans la pratique, l'indice de Laspeyres est de beaucoup le plus fréquemment utilisé, tant comme indice de prix que comme indice de quantité. Les indices de Paasche sont également souvent utilisés. Ceux d'Edgeworth, Fisher et Sidgwick qui sont des indices déduits de ceux que nous venons de décrire ne se rencontrent presque jamais.

Ce ne sont pas tant les considérations théoriques - qui valent autant pour le Paasche que pour le Laspeyres - que des raisons pratiques qui expliquent cet état de fait.

La signification économique de l'indice de Laspeyres, c'est-à-dire la fixité de son budget de référence, de son panier de provision, en fait un indice synthétique valable. Cependant, sa non-circularité entraîne un inconvénient grave: il est impossible de faire un raccordement exact entre deux indices de Laspeyres de bases différentes. Dans la pratique, de tels raccordements sont cependant réalisés, car la base de cet indice vieillit assez vite, et on est amené à en changer souvent: au bout d'un certain temps le budget de base ne correspond plus à la consommation observée pour l'année courante. Les raccordements ainsi effectués entraînent des erreurs dont il sera question plus loin.

5. CHANGEMENTS D'ORIGINE. RACCORDEMENTS D'INDICES

Les indices les plus usuellement calculés sont des indices de Laspeyres. Pour éviter le vieillissement des bases, les statisticiens sont amenés à changer assez souvent d'indices; à chaque changement d'indice, ils choisissent une base nouvelle, donc un système de pondérations nouveau. On se trouve devant le problème suivant: comment comparer des périodes entre lesquelles il n'a pas été calculé d'indice suivi, mais au contraire deux ou plusieurs indices de bases différentes? La solution pratique est de faire des raccordements entre ces indices synthétiques. Mais ce procédé conduit à des résultats insoutenables sur le plan théorique. Nous allons voir dans ce chapitre la portée de l'erreur ainsi commise. Auparavant, il s'impose de réfléchir aux changements d'origine.

Pour bien comprendre ce chapitre, il convient de revoir la distinction déjà faite entre *base* et *origine*. La *base* est choisie pour effectuer le calcul; les indices élémentaires sont ramenés à 100 pour la base et les calculs sont menés à partir de là. L'indice synthétique vaut donc 100 pour la base, et ses autres valeurs sont calculées en fonction de celle-là. Mais il arrive que l'utilisateur trouve plus commode de transformer l'indice synthétique ainsi obtenu, par simple règle de trois, en un indice qui vaut 100 à une autre période (ou pour un autre lieu). On dit alors que cette nouvelle période (ou ce nouveau lieu) est l'*origine* de l'indice synthétique ainsi transformé. Cet indice a toujours la même base, mais celle-ci n'est plus apparente.

A. LES CHANGEMENTS D'ORIGINE

Aucun problème ne se pose en ce qui concerne les indices réversibles (moyenne géométrique): chaque fois qu'on change d'origine, on obtient un indice qui est identique à celui qui aurait été obtenu avec cette date d'origine choisie pour base.

Par contre, les indices de type arithmétique, Laspeyres et Paasche, ne sont pas réversibles, et n'ont pas cette propriété. Normalement, on ne devrait donc jamais les présenter que par rapport à leur base. Or, dans la pratique, il est souvent utile de pouvoir comparer les indices entre eux ou simplement de connaître la croissance d'un indice entre deux années (1 et 2) dont aucune n'est l'année de base (0). On procède alors à un **change-ment d'origine**: en calculant:

$$\frac{1/2/0}{1/1/0} \times 100 \quad (a)$$

on obtient un indice ayant pour *origine* l'année 1.

Ce genre de calcul est pratiquement inévitable, mais il ne faut jamais perdre de vue qu'on ne trouverait pas le même résultat si on calculait un indice ayant pour base l'année 1: l'indice (a) d'*origine* 1 reste de base 0, et n'est pas le même qu'un indice de même pondération et de base 1.

Voici un exemple classique de W.C. Mitchell (15):

TABLEAU 8

Prix en dollars par boisseaux

Produit	1913	1914
Blé	1,00	0,50
Maïs	0,40	0,40

TABLEAU 9

Indices (moyenne arithmétique simple)

Indice	1913	1914
Base 1913	100	75
{ Base 1913		
{ Origine 1914	133,3	100
Base 1914	150	100

On trouve des résultats sensiblement différents: 133,3 et 150!. L'indice, selon la formule employée, a baissé de 33% ou de 50% de 1913 à 1914 sans qu'on puisse dire quelle méthode est la meilleure.

De ces faits, l'on doit tirer les conclusions suivantes, qui sont de première importance:

- Il ne faut jamais assimiler les résultats d'un changement d'origine à ceux d'un changement de base; en changeant l'origine, on n'obtient nullement un indice qui aurait pour base la nouvelle origine. Inversement, un indice de Paasche ou de Laspeyres (ou une moyenne arithmétique simple) n'a et ne peut avoir qu'une seule année de base.

- En ce qui concerne uniquement l'indice de Laspeyres, si l'on change d'origine, on obtient un nouvel indice de Laspeyres, ayant pour base la nouvelle origine, mais avec des pondérations différentes. Changer l'origine sans changer les pondérations qui servent au calcul, c'est alors garder le panier de provisions qui sert de référence; bien des utilisateurs le font sans le savoir et travaillent ainsi sur un nouveau panier de provisions, dont la composition est ignorée et souvent baroque, en croyant travailler sur l'ancien.

Notons en particulier que l'on fait implicitement un changement d'origine lorsqu'on affirme qu'un indice a augmenté de tant pour cent depuis 1 mois. On prend en effet pour origine, la date antérieure d'un mois ou d'un an; on dit que l'on opère en glissement. Il est possible de calculer les pondérations qu'aurait l'indice sur base cette origine, s'il s'agit d'un Laspeyres.

B. LES RACCORDEMENTS D'INDICES

a) Définition

De même que pour les changements d'origine, le problème des raccordements se pose uniquement pour les indices non réversibles (moyennes arithmétiques ou harmoniques, Laspeyres et Paasche, ...).

Supposons que l'on ait un indice I entre la date 0 et la date 1, et un deuxième indice I' à partir de la date 1. Il arrive très souvent que les utilisateurs éprouvent le besoin de comparer le niveau de la grandeur complexe entre la date 0 et une date 2 postérieure à 1. Aucun des deux indices successivement calculés ne permet de relier directement les dates 0 et 2. Il est alors très tentant de raccorder les deux indices par un calcul dont la facilité dissimile le caractère trompeur:

$$\frac{1}{100} I_{1/0} I'_{2/1} \quad (16)$$

Ce calcul ne serait pas nécessaire s'il était possible de calculer l'indice I' à la date 0 ou l'indice I à la date 2; mais il arrive assez fréquemment que cela ne soit pas possible, car de nombreux articles n'existent pas de façon continue entre 0 et 2 (exemple, les bougies et l'électricité entre 1880 et 1985); parfois, plus simplement, l'on ne dispose pas de relevés des grandeurs que l'on observe (prix, quantités ...) sur la période 0, 2, ou désire mettre à jour les pondérations chaque année.

Par exemple, soient deux produits dont les indices sont donnés dans le tableau suivant (nous les supposons connus sur toute la période pour faciliter les comparaisons); les indices synthétiques sont des moyennes arithmétiques simples.

TABLEAU 10

Raccordements d'indices

Dates	a	b	Calcul direct base 0	I (base 0)	I' (base 1)	Raccordement
0	100	100	100	100		100
1	150	80	115	115	100	115
2	200	60	130		104,2	120

On calcule l'indice raccordé de l'année 2 par $155 \times 104,2/100 = 120$.

Les résultats du calcul direct et du calcul par raccordement diffèrent sensiblement pour l'année 2: 130 et 120.

b) Légitimité

Les considérations théoriques et l'exemple numérique qui précèdent montrent que les raccordements d'indices non circulaires ne sont pas légitimes.

Il ne faut pas perdre de vue qu'en enchaînant un ou plusieurs indices on n'obtient pas un indice de même formule: on obtient seulement ce qu'on a calculé, c'est-à-dire un indice *sui-generis*, qui ne peut se définir que par son calcul même; c'est, et ce ne peut être qu'un enchaînement de plusieurs indices, et tout autre calcul donnerait un tout autre indice. L'usage ne peut en être totalement proscrit, mais il faut que les usagers soient suffisamment avertis de ce qu'ils sont.

Par ailleurs, il faut se garder de raccorder des indices différents dans leur conception: un indice des prix de gros et un indice des prix de détail, ou même deux indices de production industrielle dont les pondérations n'ont pas été calculées dans le même esprit, ou des indices de deux pays différents ou de deux villes ...

c) Autres raccordements

Jusqu'ici, on s'est limité au cas où il y a une seule année de raccordement, celle qui a été désignée par 1. On peut faire des raccordements un peu plus complexes si les deux indices ont été calculés simultanément sur une période un peu longue: au lieu d'utiliser une seule année de raccordement, on peut prendre toute cette période comme période de raccordement, et calculer l'indice raccordé en utilisant le rapport moyen entre les deux indices. Ce procédé permet d'obtenir un résultat plus rigoureux. En même temps, par l'observation de la période commune aux deux indices, on peut voir si le raccordement a un sens: si les deux indices ont une évolution à peu près parallèle, ils peuvent être enchaînés; sinon, on jugera qu'il vaut mieux éviter le raccordement.

d) Conclusion

Etant données les difficultés qu'il y a à calculer un véritable Laspeyres ou un véritable Paasche sur une longue période (vieillissement de la base, disparition de certains éléments ...), un indice raccordé semble être à peu près le seul indice possible à calculer, et peut-être le moins mauvais de ceux qui peuvent être calculés sur longue période. Il ne faut cependant jamais perdre de vue le caractère artificiel de cet indice, et par conséquent ne pas lui accorder la signification qu'il n'a pas.

6. INDICES CHAÎNE

Les indices étudiés dans les paragraphes qui précédent, particulièrement ceux de Laspeyres et de Paasche, sont souvent les meilleurs pour faire une étude à court terme. Par contre, si l'on cherche à faire des comparaisons à long terme, de tels indices ne sont plus satisfaisants:

- les pondérations (Laspeyres) vieillissent et ne correspondent plus à la situation actuelle. (Pour un indice de prix: la structure des consommations a changé).

- la base s'éloigne, les éléments choisis à l'époque de base ne sont plus ceux qui conviennent le mieux (Pour un indice de prix, de nouveaux produits ont été introduits, comme la TV en couleur ou le magnétoscope, produits qui n'existaient pas à l'époque de base, si celle-ci est antérieure à 1970, d'où une impossibilité de calculer la dépense de l'année de base).

C'est pourquoi des statisticiens ont proposé de changer de base à chaque nouveau calcul de l'indice, ou, en tout cas, à des dates rapprochées et régulières. On obtient ainsi une série d'indices $C_{3/2}$, $C_{2/1}$, $C_{1/0}$, ... considérés comme des **chaînons** (ou anneaux ou encore **maillons**) successifs de l'indice chaîne obtenu en faisant leur produit:

$$C_{3/0} = C_{3/2} \cdot C_{2/1} \cdot C_{1/0}$$

Chaque chaînon est calculé selon une formule de Laspeyres ou de Paasche ou plus simplement selon une moyenne arithmétique simple d'indices. L'indice chaîne est donc une généralisation du raccordement d'indices.

A. CALCUL

a) Indice de quantités, pondéré

Exemple: Calculer l'indice chaîne de la production de fer, fonte et acier. On donne les prix à la tonne et les quantités produites en tonnes:

TABLEAU 11

Production industrielle

Produit	Année 0		Année 1		Année 2	
	Prix	Quantité	Prix	Quantité	Prix	Quantité
Fer	100	1 200	110	1 000	120	800
Fonte	80	2 300	90	2 500	100	2 600
Acier	200	5 000	210	5 300	250	5 300

On calcule les deux chaînons comme des indices de Laspeyres des quantités pondérées par les prix. Le premier chaînon a pour base l'année 0.

$$C_{1/0} = 100 \frac{100 \times 1000 + 80 \times 2500 + 200 \times 5300}{100 \times 1200 + 80 \times 2300 + 200 \times 5000} = 104,3$$

Le deuxième chainon a pour base l'année 1:

$$C_{2/1} = 100 \frac{110 \times 800 + 90 \times 2600 + 210 \times 5300}{110 \times 1000 + 90 \times 2500 + 210 \times 5300} = 99,1$$

L'indice chaîne vaut alors 100 l'année 0; 104,3 l'année 1 et l'année 2:

$$C_{2/0} = \frac{1}{100} C_{2/1} \times C_{1/0} = 103,4$$

b) Indice de prix non pondéré explicitement

Soient deux produits a et b dont on connaît les indices élémentaires de prix de base t_0 aux dates t_0 , t_1 , t_2 :

TABLEAU 12

Indices élémentaires

Date	a	b
t_0	100	100
t_1	100	150
t_2	98	108

Calculons d'une part la moyenne arithmétique A (indice à base fixe) et d'autre part l'indice chaîne par deux chainons $C_{1/0}$ et $C_{2/1}$

TABLEAU 13

Calcul de l'indice chaîne

Date	A	$C_{1/0}$	I _{2/1}		$C_{2/1}$	$C_{2/0}$
			a	b		
t_0	100	100				100
t_1	125	125	100	100	100	125
t_2	103		98	72	85	106

Expliquons les calculs. Le chainon $C_{1/0}$ est identique à la moyenne arithmétique. Pour obtenir le 2^e chainon, on calcule les indices élémentaires I_{2/1}, base 100 en t_1 ; on fait en suite la moyenne arithmétique simple de ces deux indices élémentaires: $C_{2/1}$. L'indice chaîne

$C_{2/0}$ est obtenu en enchaînant les deux indices $C_{1/0}$ et $C_{2/1}$: il est identique à A pour t_0 et t_1 . En t_2 :

$$C_{2/0} = C_{2/1} \cdot C_{1/0} = \frac{85 \times 125}{100} = 106$$

B. AVANTAGES ET INCONVENIENTS

L'indice chaîne possède, par définition, la propriété de circularité. Il est donc toujours possible de raccorder des indices chaînes, pourvu qu'ils aient la même définition.

Chaque anneau de la chaîne est une représentation valable de la situation à une période par rapport à la période la plus voisine. Mais les difficultés apparaissent dès qu'on enchaîne les anneaux:

- Toute erreur dans un des anneaux de la chaîne se fait sentir dans tous les indices suivants. (17).

- Le calcul est plus long que pour les indices à base fixe puisqu'il faut construire un nouvel indice à chaque chainon. A cette difficulté s'ajoute la nécessité de calculer toutes les dates intermédiaires.

- Surtout, un tel indice, à long terme, risque de n'avoir plus de signification économique: la valeur économique de chaque anneau disparaît dès que les anneaux sont en chaîne. Ci-dessus, 2^e exemple, le résultat obtenu est 106 pour l'indice chaîne et 103 pour un indice à base fixe. La différence, sensible, s'explique parce que le budget de référence varie d'un anneau à l'autre.

- Sur une période assez longue, on arrive vite à faire dire n'importe quoi à des indices chaînes, car le manque de signification économique devient de plus en plus grave quand le nombre d'anneaux augmente. C'est ainsi (18), qu'en calculant un indice de prix sur la période 1840-1954, nous avons obtenu des résultats étonnantes en ce qui concerne les indices chaînes.

Les indices qui sont présentés dans le tableau 14 ont été calculés sur environ 200 articles, en France, d'année en année, de 1840 à 1954. Nous ne donnons ici que 3 années de résultats, l'année de base étant 1952. Deux indices chaînes non pondérés avec chainons chaque année ont été calculés; celui qui est indiqué par 1840-1954 est caractérisé par des chainons dont la base est toujours l'année précédente; celui qui s'appelle 1954-1840 est caractérisé par des chainons dont la base est toujours l'année suivante (cela reviendrait à une moyenne harmoni-

que de base l'année précédente). L'indice chaîne pondéré a des chaînons d'environ 20 ans. Pour faciliter les comparaisons un indice de Laspeyres, base 1952, est également présenté. Un indice moyenne arithmétique simple avait été calculé également: ses valeurs étaient voisines de celles de l'indice de Laspeyres; les divergences importantes constatées ne sont pas imputables au fait que certains indices sont pondérés et d'autres non.

TABLEAU 14
Indices chaînes sur longue période (1840-1954)

Indice	1840	1900	1952
Indice chaîne non pondéré d'année en année (1840-1954)	250	302	100 000
Indice chaîne pondéré sur des périodes de 20 ans environ (1840-1954)	391	-	100 000
Indice chaîne non pondéré d'année en année (1954-1840)	2 032	1 373	100 000
Laspeyres, base 1952	611	680	100 000

On voit qu'entre 250 et 2 032 en 1840, beaucoup de résultats sont possibles et légitimes du point de vue purement statistique; or, il s'agit de savoir par combien a été multiplié le coût de la vie de 1840 à 1954: 400, 250 ou 49! (Des divergences moins importantes, mais sensibles, ont été calculées entre des indices de Laspeyres et de Paasche sur cette même période. Il n'existe pas de réponse précise à la question: par combien a été multiplié le coût de la vie de 1840 à 1954?).

C. ETUDE DES DIVERGENCES DUES AU SENS DU CALCUL (MOYENNES SIMPLES)

On constate que si la base choisie est la période précédente ou la période suivante, les résultats sont fort différents (dans l'exemple ci-dessus; 250 ou 2 032 en 1840).

Si l'on prend pour base l'année précédente (sens normal de temps), on calcule pour chaque indice la moyenne arithmétique simple (ou pondérée) des indices

élémentaires, base 100 l'année précédente. Par contre, si l'on prend pour base l'année suivante (en remontant le temps), on calcule la moyenne harmonique des mêmes indices élémentaires. Or la moyenne arithmétique est toujours supérieure à la moyenne harmonique. Il en résulte que pour chaque anneau de la chaîne, l'indice dans le sens normal du temps est plus grand que celui qui est calculé en remontant le temps. Quand on multiplie les anneaux les uns par les autres, il est clair que les divergences s'accentuent.

On peut donner de ce résultat une explication plus concrète, et plus intuitive, en prenant l'exemple des indices de prix. Supposons que le prix d'un produit monte de l'année 0 à l'année 1: en calculant un indice de base l'année 1 par rapport à 0, on considère une quantité de ce produit, celle qui coûtait 100 F l'année 0. Pour calculer l'indice de l'année 0 par rapport à l'année 1, on considère la quantité de ce produit qui valait 100 F l'année 1; elle est plus petite que la précédente, puisque par hypothèse le prix a monté. Dans l'indice 0/1 intervient donc une quantité physique moindre du produit qui a monté que dans l'indice 1/0: ce dernier monte donc plus que le premier.

Un raisonnement analogue peut être fait en considérant un produit qui baisse entre 0 et 1: la quantité physique de ce produit qui intervient dans le panier de provisions de l'indice 0/1 est plus grande que dans celui de l'indice 1/0. Sa baisse a donc plus d'influence sur l'indice 0/1 que sur l'indice 1/0.

Dans les deux cas, l'indice 1/0 est plus fort que l'indice 0/1: il accentue la hausse et diminue la baisse des articles.

D. COMPARAISONS DES INDICES CHAINES ET DES INDICES A BASE FIXE

Il reste à expliquer la divergence entre les indices chaînes et les indices à base fixe. Quelques exemples un peu caricaturaux permettront de voir son importance:

TABLEAU 15
Indice chaîne - premier exemple

Date	Article a	Article b	Moyenne arithmétique	Indice chaîne
t_0	100	100	100	100
t_1	100	200	150	150
t_2	100	100	100	112,5

Les situations 0 et 2 sont identiques: or l'indice chaîne indique un hausse de 12,5%. De même:

TABLEAU 16
Indice chaîne - deuxième exemple

t_0	100	100	100	100
t_1	100	60	80	80
t_2	100	100	100	106,67

On trouve une hausse de 6,6% pour deux situations observées identiques.

TABLEAU 17
Indice chaîne - troisième exemple

t_0	100	100	100	100
t_1	125	75	100	100
t_2	150	50	100	93,33

L'indice à base fixe n'a pas changé, alors que l'indice chaîne baisse.

On pourrait multiplier de tels exemples. L'explication de ce comportement inquiétant de l'indice chaîne est à rechercher en considérant les quantités physiques de chaque produit qui interviennent dans l'indice.

Considérons un produit dont le prix monte entre les dates 0 et 1. A la plus faible vaut 100 F. Que se passe-t-il alors entre 1 et 2?

- le panier de provisions de l'indice à base fixe contient toujours 100 F du produit à la date 0;

- dans l'indice chaîne, intervient une quantité moindre.

Si alors le prix du produit continue à monter entre 1 et 2, l'indice à base fixe monte plus du fait de ce produit que l'indice chaîne. Si le produit baisse entre 1 et 2, l'indice à base fixe baisse plus que l'indice chaîne.

De même, si le prix d'un produit baisse entre 0 et 1, à la date 1, le budget de l'indice à base fixe contient une quantité physique moindre de ce produit que celui de l'indice chaîne. Donc si ce produit continue à baisser entre 1 et 2, il fait baisser l'indice chaîne plus que l'indice à base fixe. S'il monte, il le fait plus monter que l'indice à base fixe. (19)

Ces affirmations suffisent à expliquer les deux premiers exemples:

- Dans l'exemple 1, l'article b a monté entre 0 et 1 de 100 à 200. Le deuxième anneau la moyenne arithmétique. Par conséquent, la baisse de b entre 1 et 2 affecte plus la moyenne arithmétique que l'indice chaîne qui se trouve ainsi paradoxalement supérieur à 100.

- Dans l'exemple 2, l'article b a baissé, puis monté, il a donc un poids plus grand dans l'indice chaîne que dans l'indice à base fixe. L'indice chaîne monte donc plus haut que 100.

- L'exemple 3 est plus complexe, puisque les deux articles ont varié en même temps. L'article a monté, puis monte encore, ce qui a tendance à faire monter la moyenne arithmétique plus que l'indice chaîne. L'article b baisse, puis baisse encore, ce qui fait baisser l'indice chaîne plus que l'indice à base fixe. Les évolutions des prix des deux produits se compensent: la moyenne arithmétique reste fixe; mais l'indice chaîne, qui doit lui être inférieur du fait de chacun des deux articles, baisse.

La plupart des indices synthétiques font intervenir plus de deux articles! L'explication des résultats donnés par les indices chaînes est alors fort délicate, et reste souvent, dans l'état actuel des recherches théoriques, peu satisfaisante.

E. EXEMPLE DES PRIX DES PRODUITS ENERGETIQUES EN FRANCE

On donne quelques résultats concernant l'indice du coût de la vie en France en 1982, base 1970, pour les produits énergétiques, produits dont le prix a le plus varié en France dans la période récente (tableau 18).

Pour calculer l'indice de Laspeyres de base 1970, on utilise les pondérations de 1970, et l'on obtient, en 1982:

$$L_{82/70} = \frac{69 \times 540,4 + 50 \times 11016,6 + \dots}{525} = 472,2$$

Pour calculer l'indice de Paasche, on utilise les pondérations 1982:

$$\frac{1}{P_{82/70}} = \frac{\frac{23}{540,4} + \frac{227}{1\ 106,6} + \dots}{1\ 032} = \frac{2,32}{1032}$$

et $P_{82/70} = 445$

L'indice 457,4 qui figure sur le tableau est un indice chaîne; il vaut environ 15 points de moins que l'indice de Laspeyres et 12 points de plus que l'indice de Paasche.

TABLEAU 18

Indice du coût de la vie en France (Produits énergétique)

Produits	Pondération 1970	Pondération 1982	Indice 1982 base 1970
Charbons	69	23	540,4
Fuels	50	227	1 106,6
Essence	188	437	389,9
Gaz de Ville	65	118	417,5
Electricité	112	189	324,8
Autres	41	38	450,1
Total	525	1 032	457,4

Il y a donc une différence entre les indices à base fixe et l'indice chaîne. L'indice chaîne se situe entre l'indice de Laspeyres et l'indice de Paasche, ce qui est fort intéressant (et se produit fréquemment). Les différences sont relativement faibles, même pour les produits énergétiques dont le prix a beaucoup varié de 1970 à 1982. Elles seraient encore plus faibles si les prix avaient moins varié. Le calcul par indices chaînes se justifie donc dans le cas de l'indice du coût de la vie en France, en raison des avantages que nous avons indiqués (on notera en particulier, que la pondération a beaucoup varié sur la période).

F. CONCLUSION

La question des indices chaînes est complexe; les changements de pondérations de chaque article y jouent un rôle prépondérant. A la limite, il serait possible de faire dire n'importe quoi à des indices chaînes, par exemple en choisissant convenablement les dates de chan-

gement de base et en les rendant assez nombreuses.

On peut être un peu moins pessimiste en ce qui concerne les indices chaînes pondérés, dont la pondération change pour chaque anneau (voir l'exemple du E). L'étude de tels indices est encore à l'état embryonnaire, et les conclusions sont délicates. Il est évident que, plus encore que pour les indices chaînes considérés ici, chaque anneau est un indice valable. Mais bien qu'on ne puisse attribuer, même dans ce cas, une signification économique à l'indice obtenu en les enchaînant la relativement faible différence observée au E) entre l'indice chaîne et les indices à base fixe sur une période déjà longue (12 ans) justifie, en tout cas, l'usage qu'un certain nombre de pays font de cette formule pour le calcul de leur indice des prix à la consommation.

Quelle que soit sa forme, l'indice chaîne n'a que peu de sens économique sur une longue période. Mais on ne peut en proscrire totalement l'usage, car on est amené tout au moins à faire des raccordements d'indices. De plus, chaque anneau de la chaîne constitue en lui-même un indice séduisant: il faudrait calculer ces anneaux, mais en évitant soigneusement de les enchaîner. Ceci est pratiquement impossible. Il reste le choix entre deux solutions dont aucune n'est parfaite:

- calculer des indices à base fixe (Laspeyres ou Paasche). Mais on est amené à ne pas les calculer que sur des périodes assez courtes pour que la base ne vieillisse pas trop.

- calculer des indices chaînes, avec, par exemple, changement de base chaque année. On a une meilleure évaluation à court terme, mais on est amené à enchaîner les maillons pour connaître les variations sur une longue période.

7. AUTRES INDICES

Nous rassemblons ici quelques formules d'indices qui ont une importance soit théorique, soit pratique et qu'il est bon de connaître.

Notons auparavant combien il serait souhaitable d'introduire dans l'usage courant la notion d'*indice double*: au lieu de représenter par un seul indice synthétique les variations d'un ensemble d'indices élémentaires on donnerait deux indices entre lesquels se situerait l'évolution cherchée.

Ces deux indices pourraient être les deux indices ex-

trèmes, celui qui a le plus monté et celui qui a le moins monté. L'indice double constitue la fourchette de variation; cette fourchette est souvent trop large pour être réaliste; par contre, elle constitue un critère de jugement: aucun indice synthétique ne peut se trouver valablement en dehors d'elle.

On pourrait penser également, en guise d'indice double, au premier et au troisième quartile ou bien au premier et au 3^e décile.

A. L'INDICE VRAI DU COUT DE LA VIE

a) Définition

Cet indice est purement théorique. Il semble cependant important d'y faire allusion dans ce cours, car il représente ce que cherchent les économètres (et inconsciemment tous les hommes) lorsqu'ils calculent ou utilisent un indice du coût de la vie.

Cet indice est fondé sur la théorie du comportement rationnel du consommateur qui doit donc être rapidement résumée ici (20). On suppose que tout consommateur a une notion d'utilité (représentée par une fonction) qui lui permet de choisir entre deux objets celui qui lui est le plus utile. Il existe un certain nombre de budgets qui pour lui ont la même utilité: ces budgets forment ce qu'on appelle une surface d'indifférence (dans l'espace purement théorique des quantités: espace qui a autant de dimensions qu'il existe de produits). A partir de cette théorie, on définit deux indices:

- L'indice vrai du coût de la vie I. Dans cet indice figurent au numérateur (date 1) et au dénominateur (date 0) les sommes d'argent qui permettent au consommateur d'acquérir un panier de provisions grâce auquel: il conserve le niveau d'utilité qu'il avait à la date 0.

- L'indice réciproque du coût de la vie J. Il est mesuré par un rapport analogue, mais cette fois-ci, le niveau d'utilité est celui de la date 1.

b) Formules permettant théoriquement, d'approcher l'indice vrai

- On démontre que l'indice de Laspeyres est supérieur à l'indice vrai du coût de la vie, et que l'indice de Paasche est inférieur à l'indice réciproque du coût de la vie. Les deux indices I et J, sont, répétons-le, purement théoriques: ils ne peuvent donc être calculés.

Les indices de Paasche et de Laspeyres constituent des indices calculables entre lesquels I et J se situent très souvent. En effet, d'après ce qui vient d'être dit:

$$L \geq I \quad \text{et} \quad P \leq J$$

Si I et J sont voisins, ce qui se produit souvent, au moins sur de courtes périodes, on a:

$$P \leq I, \quad J \leq L$$

- Deux autres formules permettent d'arriver à une valeur proche de l'indice vrai, l'une est la formule déjà classique de Fisher:

$$F = \sqrt{L \cdot P}$$

qui a l'avantage d'être un indice réversible et circulaire l'autre est celle de Törnqvist: l'indice T de Törnqvist est tel que:

$$\ln T = \sum_j \bar{w}_j \ln \frac{p_j^i}{p_j^o}$$

Les pondérations \bar{w}_j sont les moyennes arithmétiques des pondérations Laspeyres et Paasche:

$$\bar{w}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{p_i^j p_i^j}{\sum_j p_i^j q_i^j} + \frac{p_o^j q_o^j}{\sum_j p_o^j q_o^j} \right)$$

- De façon générale, il existe beaucoup d'indices théoriques. La théorie des indices est très en avance sur la pratique, mais elle en est aussi parfois trop éloignée.

c) Conclusion

La notion économique d'indice vrai du coût de la vie suppose l'existence d'un consommateur moyen; elle suppose aussi que ce consommateur moyen a des préférences dont on peut connaître au moins des approximations. Ces hypothèses, bien que commodes, sont discutables. Il nous semble préférable d'utiliser des indices réellement calculables, par lesquels on ne prétend pas estimer le coût de la vie en général, mais l'évolution du pouvoir d'achat d'une catégorie bien déterminée, sur la base de ses consommations d'une année déterminée (qu'elle soit l'année de base ou l'année courante).

B. INDICES ET METHODES UTILISES POUR LES COMPARAISONS INTERNATIONALES

a) Méthodes déjà présentées dans cet ouvrage

Les comparaisons entre nations, sur le principe, ne sont pas différentes des comparaisons entre époques. Il est donc possible de leur appliquer les méthodes déjà indiquées.

On choisit l'un des pays comme base, et on calcule soit un indice de Laspeyres, soit un indice de Paasche. Ceci permet, théoriquement, de comparer dans l'espace des prix ou des quantités, en utilisant les formules qui ont été présentées ci-dessus pour les comparaisons dans le temps.

Cette méthode a cependant des inconvénients plus importants dans l'espace que dans le temps; l'hypothèse selon laquelle la structure des prix ou de la production change lentement avec le temps dans un seul pays ne peut pas être transposée de façon justifiable pour des comparaisons entre pays (21). Les divergences entre les indices de Paasche et de Laspeyres, déjà sensibles pour les comparaisons dans le temps, risquent de devenir importantes.

On peut aussi comparer les croissances d'indices calculés dans différents pays; par exemple, la croissance de la production industrielle. Mais (22) toute comparaison d'indices ne peut se faire qu'à formules et conventions identiques. Les comparaisons de l'expansion ou de l'inflation entre pays sont fort délicates parce que, malgré des efforts appréciables, les pratiques des différents pays restent très diverses.

b) Autres méthodes

Les organismes internationaux qui désirent comparer des agrégats comme le Produit Intérieur Brut (P.I.B.) utilisent assez souvent les taux de change officiels, et convertissent les prix nationaux en une monnaie unique. (Par exemple, le dollar des Etats-Unis). On peut alors calculer des indices, mais ceux-ci ne sont pas nécessairement circulaires, c'est-à-dire que la comparaison entre les pays A et B, puis B et C n'est pas forcément cohérente avec la comparaison entre A et C (23). Plus grave, le taux de change officiel résulte d'une décision politique: il ne traduit pas forcément la réalité; chacun sait qu'à certains périodes le taux de change rend la vie chère ou au contraire bon marché pour les étrangers d'un pays se rendant dans un autre.

Pour remédier aux défauts des taux de change, il existe deux sortes de méthodes.

- Celle que consiste à calculer les pondérations en tenant compte de tous les prix pratiqués dans les différents pays; la plus connue de ces méthodes est celle de Geary et Khamis (24).

- Celle des **prix réels** ou **prix salariaux**, préconisée par Jean Fourastié (25) qui consiste à exprimer les prix dans chaque pays, non en monnaie du pays, mais en salaire horaire du manœuvre. Si, dans un pays, une table coûte 500 unités monétaires, alors que le salaire horaire total (charges sociales comprises) du manœuvre est 35 unités monétaires, le prix réel de la table est:

$$\frac{500}{35} = 14,28 \text{ salaires horaires}$$

Il est alors facile de comparer le prix de cette table avec celui pratiqué dans un autre pays, calculé lui aussi en salaire horaires.

De nombreux prix réels ont été calculés (26), mais jusqu'ici peu d'indices en ont été déduits.

C. AUTRES INDICES

a) Formules construites à partir de celles de Laspeyres et de Paasche

Les formules de Laspeyres et de Paasche ne donnent pas en général le même résultat, quand elles sont appliquées aux mêmes indices élémentaires. On observe parfois des différences appréciables entre elles. C'est pourquoi de nombreux auteurs ont pensé que la vérité (dans la mesure où elle peut être traduite par un seul indice synthétique!) se situerait entre les deux; ils ont donc proposé un certain nombre d'indices qui sont en quelque sorte des moyennes des indices de Laspeyres et de Paasche:

Edgeworth a suggéré un indice dont les pondérations sont les moyennes arithmétiques des poids de l'année de base et de l'année courante. Pour un indice de prix, la formule est la suivante:

$$E_{i/o} = \frac{\sum_j (q_i^j + q_o^j) p_i^j}{\sum_j (q_i^j + q_o^j) p_o^j}$$

Sidgwick et Drobisch ont proposé la moyenne arithmétique simple des indices de Paasche et de Laspeyres:

$$S = \frac{L + P}{2}$$

Irving Fisher a préféré leur moyenne géométrique, qu'il a baptisée indice idéal:

$$F = \sqrt{LP}$$

Cet indice a l'avantage d'être réversible:

$$F_{0/i} = \sqrt{L_{0/i} P_{0/i}} = \frac{1}{\sqrt{P_{i/0} L_{i/0}}} F_{i/0}$$

Mais on ne peut lui attribuer aucune signification économique précise.

b) Indices utilisés pour les salaires (27)

On peut élaborer un indice de salaire pondéré non par la masse salariale (ce serait alors un indice de Laspeyres), mais par les effectifs de salariés. En désignant par:

s_j^i, s_j^o les salaires de la catégorie j aux dates i et o.

n_0^j l'effectif de la même catégorie.

l'indice s'écrit:

$$S_{i/o} = \frac{\sum_j n_0^j \frac{s_j^i}{s_j^o}}{\sum_j n_0^j}$$

Cet indice attribue à chaque personne la même importance, alors qu'un indice de Laspeyres attribue à chacune une importance proportionnelle à son revenu. Des différences, parfois importantes, existent entre les résultats des deux formules.

c) Indices de la productivité

La productivité est le rapport:

$$\text{Productivité} = \frac{\text{Volume physique de la production}}{\text{Facteurs de production}}$$

Elle est difficile à mesurer, mais ce qui est le plus important, c'est de mesurer les progrès de productivité. On utilise le rapport:

$$I = \frac{\text{Indice du volume de la production}}{\text{Indice du volume des facteurs de production}}$$

On estime l'un et l'autre par les valeurs, à prix constants (28). Le résultat dépend malheureusement du système de prix constants utilisé.

La revue qui vient d'être faite des formules d'indices statistiques est loin d'être complète. Cependant, toutes les formules utilisées dans les indices officiels ont été présentées.

Le lecteur aura certainement compris, au terme de cette partie du cours, que les formules d'indices ne donnent pas toutes le même résultat ... le choix de cette formule n'est donc pas neutre. Cependant, les contraintes de la réalité ne laissent pas beaucoup de liberté aux statisticiens ...

III. PRATIQUE DU CALCUL DES INDICES STATISTIQUES

1. QUELQUES INDICES DANS DIFFERENTS PAYS

Il ne peut être question ici de donner un inventaire de tous les indices publiés dans le monde. Une publication, malheureusement ancienne, des Nations Unies (29) peut permettre cette comparaison exhaustive. Contentons-nous ici d'indiquer quelques constantes, notamment dans l'usage des formules.

A. INDICE DES PRIX A LA CONSOMMATION

D'une façon générale, les indices de prix à la consommation sont calculés selon la formule de Laspeyres. Les différences essentielles proviennent de la population couverte ou de la date de l'année de base. La figure 13 reproduit la description de 3 indices pris au hasard dans l'ordre alphabétique. On voit que si les formules sont analogues, les pondérations ne le sont pas; l'évolution des proportions entre l'alimentation, l'industrie et le tertiaire, dépend de l'état de développement du pays:

pays encore peu développés: prépondérance alimentaire,

pays plus développés: le secteur secondaire prend plus d'importance,

pays très développés: le secondaire à son tour diminue pour laisser place au tertiaire (services).

Quelques pays utilisent d'autres formules que celle de Laspeyres:

- indice chaîne (en général chaîne Laspeyres): Australie, France, Grande Bretagne, Suède, Thaïlande.

- la moyenne simple est utilisée en Belgique (calcul dans différents centres où l'on effectue la moyenne simple des indices élémentaires). Une méthode un peu analogue, mais avec des pondérations, est utilisée en Egypte.

- la formule de Paasche est utilisée en République Démocratique Allemande, en Roumanie, en URSS.

- les U.S.A. ont une méthode spéciale, reproduite à la fig. 14, toujours d'après le 1977 *Supplement* ...

FIGURE 13

MEXICO (Mexico City)

Official title: Wholesale Price Index in Mexico City.

Original base. 1939 = 100. (Also published on base 1954 = 100).

Computation. Base-weighted arithmetic average in the aggregative form, calculated by the Banco Central.

Weights and composition. The weights are based on the estimated commodity consumption in the whole country during 1939. These estimates are derived from the Industrial Census of 1940, from data provided by the Ministry of Agriculture and from Foreign Trade Statistics. The number of items and percentage weights of the major groups are as follows:

	Number of items	Percentage weights
Consumers goods	(114)	(60,4)
Foodstuffs		
Raw	29	27,6
Manufactured	41	13,8
Non food products	44	19,0
Producers goods	(96)	(39,6)
Raw materials		
Non-manufactured	15	13,8

Manufactured

Metals, chemicals, vegetables, paper and other ...	47	7,9
Building materials	19	3,0
Fuel and energy	9	10,1
Vehicles and accessories	6	4,8
TOTAL	210	100,0

The wholesale price of farm products is the raw foodstuffs component of the general index while the index of textile products is the "textiles and yarn" subdivision of the "non-food products" group.

Price specifications. In most cases, prices include sales taxes and import duties. Subsidies are not taken into account. Price quotations for 44 seasonal commodities are adjusted for seasonal variations.

Basic price data. Approximately 316 price quotations are collected by agents directly from industrial establishments traders and importers in Mexico City. The frequency of collection varies from daily to semi-annually, depending upon the fluctuations of the item concerned.

For further details, see Memoria de la Primera Reunión de Técnicos sobre Problemas del Banco Central del Continente Americano, 1946. Banco de México. (Mexico City).

Morocco (Casablanca)

Official title. Wholesale Price Index in Casablanca.

Original base. 1939 = 100

Computation. Base-weight arithmetic average of price relatives.

Weights and consumption. Weights are based on the value goods domestically consumed in 1938. They are derived from data on production plus imports less exports. The number of items and percentage weights of the major groups are:

	Number of items	Percentage weights
Food products.....	(20)	(70,0)
Cereals	5	36,4
Meat	3	11,9
Other products	12	21,7
Raw materials and industrial products	(49)	(30,0)
Fuel	7	7,2
Minerals and metallurgical products	7	8,4
Textiles and hides	11	7,5
Chemical products	12	3,3
Paper and wood	8	1,5
Building materials	4	2,1
TOTAL	69	100,0

The index is also classified according to domestic and imported products with weights of 77 per cent and 23 per cent respectively.

Basic price data. Prices are obtained monthly in Casablanca from the Bourse de Commerce de Casablanca or directly from wholesalers. Some controlled prices are also included in the data.

Netherlands

Official title. (a). Index of producers' and import prices of purchased raw materials, semi-manufactures and auxiliary materials.

(b) Index of producers' prices of final products.

Original base. 1970 = 100.

Computation. Base-weighted arithmetic average of price relatives.

Weights and composition. Weights are derived from the value of domestic production and imports registered for 1969. A price correction has been applied to bring the basis to 1970. The composition of the independent indexes and their respective weights are as follows.

(a) Index of producers' and import prices of purchased raw materials, semi-manufactures and auxiliary materials:

	Weights
Food manufacturing industries	394,7
Beverages and tobacco industries	10,4
Wood and furniture industries	20,9
Chemical industries	71,2
Manufacture of textiles	48,5
Manufacture of clothing	25,9
Manufacture of paper and paper products	23,8
Rubber industries	5,9
Synthetic industries	10,2
Manufacture of leather footwear and other leather products	8,2
Crude oil industries	109,7
Manufacture of building materials earthenware and glass	14,2
Metal industries	146,1
Auxiliaries	110,3
TOTAL	1 000,0

This index is also compiled as follows:

	Weights
Imported	558,1
Of inland origin	441,9
TOTAL	1 000,0

FIGURE 14

United States

Official title. Consumer Price Index for Urban Wage Earners and Clerical Workers.

Official base. 1967 = 100.

Computation. Average price changes from the previous pricing period to the current month are expressed in percentage terms for each item, and the percentage changes for the various goods and services are combined, using weighting factors based on the item's importance in consumer spending and that of other items which it represents. This composite importance is called the cost weight of the market basket item. The cost weights for each of the items are then combined into area totals for commodity groups and all items. The US totals are obtained by combining 56 areas totals, with each area total weighted according to the proportion of the wage-earner and clerical-worker population which it represents in the index based on 1960 census figures.

Weights and composition. The weights and selected items were derived from surveys of consumer expenditures covering about 5 000 urban wage earner and clerical worker consumer units. The surveys were conducted in 72 urban areas, primarily representing expenditures in 1960-61. The families represented in the index average 3,7 persons in size and their average family annual income was about \$6 230 after taxes. The average annual income of single persons was about \$3 560 after taxes. The approximate number of items in each major group and the relative importance of the groups as of December 1974 are as follows:

Group	Number of items	Percentage weights
Food	101	24,8
Housing :		
Shelter (rent, home ownership and maintenance and repairs)	17	21,3
Fuel and utilities	10	5,0
Household furnishings and operation	53	7,5
Clothing	68	9,6
Transport	40	12,7
Medical care	56	6,3
Personal care	12	2,5
Reading and recreation	31	5,2
Other	17	5,1
TOTAL	405	100,0

Price data. Most prices are collected by agents from a representative sample of about 18 000 stores and service establishments in 56 urban areas. Rental rates are obtained from about 40 000 tenants. Prices for food items, utilities and a few other important items are collected every month in each urban location. Most other goods and services are priced monthly in the five largest metropolitan areas and quarterly in all other areas.

National publications. Monthly Labor Review and The CPI Detail Report, Bureau of Labor Statistics, Department of Labor (Washington, D.C. 20212).

For further methodological details, see The Consumer Price Index: History and Techniques, Bulletin No. 1517, BLS Handbook of Methods, Bulletin 1711 1971 and The Consumer Price Index a short description 1971. Bureau of Labor Statistics Department of Labor (Washington, D.C. 20212).

B. INDICES DES PRIX DE GROS

Tous les pays utilisent un indice de Laspeyres, à l'exception de la Belgique qui utilise une moyenne géométrique simple d'indices élémentaires, et de l'URSS qui emploie un indice chaîne.

C. INDICES DE LA PRODUCTION INDUSTRIELLE

Les indices sont en général des indices de Laspeyres. Il y a souvent correction des variations saisonnières et du nombre de jours ouvrables. La Belgique, la Yougoslavie et quelques autres pays utilisent des indices chaîne. En 1977, les années de base étaient les suivantes, pour un certain nombre de pays:

TABLEAU 19

Année de base des indices de la production industrielle (en 1977)

Argentine	1960	R.F.A.	1970
Australie	1963	Hongrie	1975
Autriche	1971	Italie	1972
Brésil	1970	Japon	1970
Bulgarie	1960	Mexique	1970
Canada	1971	Portugal	1970
Danemark	1970	Espagne	1962
France	1970	U.R.S.S.	1970
R.D.A.	1975	Grande-Bretagne	1970

2. DIVERGENCES ENTRE LES INDICES

Le lecteur attentif des pages qui précèdent est convaincu, nous l'espérons, que les différentes formules d'indices que nous avons décrites, ne donnent pas les mêmes résultats. Des indices, calculés par des statisticiens intègres mais différents, peuvent être divergents à cause du choix des séries.

Le choix de la formule, le choix de l'année de base, celui des séries de prix, ne sont pas neutres: choisir une autre formule ou une autre année de base conduit à un résultat un peu autre. A court terme, les différences sont en général faibles, mais à long terme, elles sont parfois démesurément importantes.

Plus profondément, on peut même se demander s'il existe réellement un indice unique pour représenter des séries élémentaires dispersées. Une prise de conscience de la dispersion de ces indices à l'aide de caractéristiques statistiques est en tout cas indispensable.

Les sciences plus anciennes, comme la science physique, ont aidé leurs usagers à comprendre la notion d'**erreur**. Il serait utile de développer cette notion en statistique et particulièrement quand il s'agit d'indices.

L'object du présent paragraphe est de développer les idées que nous venons d'exposer. La recherche de la notion d'**erreur** en statistique est actuellement à l'état embryonnaire, mais nous voudrions développer un certain nombre de pistes dont certaines nous sont personnelles et qui pourraient permettre d'avancer en ce domaine.

A. DIVERGENCES DUES AUX FORMULES

Quelques uns des exemples qui ont été donnés dans les chapitres qui précèdent montrent que le choix de la formule a une incidence sur le résultat final. (Voir les différences entre les indices de Laspeyres et de Paasche, et celles entre les indices chaînes et les indices à base fixe dans les pages qui précédent).

Dans une étude antérieure (30), nous avons utilisé un matériel de prix, celui des prix des 213 articles qui, en France, ont été réunis dans l'indice de base 1949. Ces prix avaient été observés de 1840 à 1954. Ce matériel a servi à calculer quantité d'indices de prix de formules différentes. Les résultats ne diffèrent qu'à cause des formules et non à cause des prix ou des produits choisis. Une récapitulation de ces indices est présentée dans le tableau de la page suivante. Il est à remarquer que, si l'on excepte les indices chaînes, tous les autres indices sont assez proches les uns des autres, en ce sens que les divergences qui apparaissent entre eux sont de l'ordre de 40% au plus. Ce taux de disparité sera trouvé encore élevé, évidemment, par tous les hommes qui pensaient que toutes les formules d'indices devraient donner les mêmes chiffres ou des chiffres très voisins. Mais, inversement, elle peut paraître assez faible aux économistes qui étaient conscients des divergences qu'impliquent nécessairement les différentes formules, compte tenu du fait qu'il s'agit d'une période de temps dépassant un siècle. Cette constatation permet d'affirmer que l'évolution du coût

de la vie peut être définie dans les limites de la fourchette formée par celui de ces indices qui a le plus monté et celui qui a le moins monté. On peut admettre par exemple, que l'ampleur de l'évolution est comprise entre l'indice de Laspeyres VIF et la moyenne arithmétique IA; l'indice XB donne l'utile référence de la dispersion entre le premier et le troisième quartile. Enfin, l'indice XD montre les limites extrêmes de la population de prix étudiée, c'est-à-dire l'indice du produit dont le prix a le plus monté, et celui du produit dont le prix a le moins monté (cf. tableau 21).

On peut conclure que peuvent être considérés comme légitimes, du point de vue de la technique statistique, les indices qui font apparaître que le coût de la vie a été, de 1840 à 1954, multiplié par un nombre compris entre 140 et 250. C'est encore une très large plage!

Plus précisément, si on recherche un indice de signification économique à la fois simple et concrète, c'est très probablement au Laspeyres IVD que l'on donnera la préférence; cet indice IVD est contrôlé et en quelque sorte garanti par le calcul des indices comportant des lacunes: IVA, IVB. Cet indice IVD assigne au coût de la vie une valeur 159 fois plus forte en 1952 qu'en 1840.

Par ailleurs, l'économiste qui s'intéresse au court terme notera que, si l'on ne se borne pas aux confrontations des extrémités de la chaîne séculaire, mais aux mouvements d'une année à l'autre, d'importantes disparités de détail se font jour, pouvant aller jusqu'à mettre en cause le sens de l'évolution.

TABLEAU 20
TABLEAU RECAPITULATIF DES PRINCIPAUX INDICES CALCULES

ANNEE	I A	II A	III A	IV A	IV B	IV D	VI G	VII A	VIII B	IX A	IX B	X A
1840	673	519	419	611	611	621	471	----	----	250	2 032	457.
1850	844	512	404	622	573	615	----	----	----	244	1 721	434
1860	760	565	460	664	648	650	478	522	589	280	1 767	483
1870	781	594	490	723	708	711	----	----	----	318	1 830	500
1880	712	549	460	727	753	762	626	----	----	321	1 695	495
1890	669	459	424	681	699	756	483	----	----	306	1 503	448
1900	818	523	422	680	684	705	459	488	576	302	1 373	435
1910	660	----	434	647	681	649	----	----	----	312	1 308	477
1914	691	----	463	724	788	----	----	----	----	326	1 341	505
1920	2 166	1 875	1 574	2 195	2 220	2 183	2 146	----	----	1 263	3 645	1 979
1930	3 372	----	2 711	3 688	3 943	3 693	3 489	3 489	3 587	2 348	5 500	2 874
1940	5 204	4 543	4 058	5 365	5 573	5 357	4 951	----	----	3 891	7 578	4 591
1950	75 428	73 840	72 300	77 838	80 225	77 826	----	----	----	71 907	75 352	73 370
1952	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
1954	93 730	92 810	91 800	97 190	97 692	96 713	----	----	----	98 517	88 555	95 280

I A : Moyenne arithmétique simple.

II A : Moyenne géométrique simple.

III A : Moyenne harmonique simple.

IV A : Laspeyres, 1952, avec lacunes. VI G : Indice raccordé.

IV B : Laspeyres, 1952, 50 articles. VII A : Indice de Paasche.

IV D : Laspeyres, 1952, pondération VIII B : Indice de Fisher.
reconstituée.

IX A : Indice chaîne, en descendant le temps.

IX B : Indice chaîne, en remontant le temps.

X A : Médiane.

Source: Jacqueline Fourastié, *les formules d'indices de prix*, Armand Colin, Paris, 1966.

TABLEAU 21
LIMITES DES VARIATIONS DE L'INDICE DU COUT DE LA VIE
ENTRE 1840 ET 1954

ANNEE	VI F	I A	INDICE X B		INDICE X D	
			1 ^{er} quartile	3 ^e quartile	Premier	Dernier
1840	377	673	317	851	161	2 616
1850	---	844	301	930	127	8 606
1860	405	760	325	927	161	5 009
1870	---	781	340	968	161	5 009
1880	492	712	350	766	145	5 009
1890	474	669	310	665	186	4 800
1900	454	818	317	750	160	14 080
1910	---	660	341	736	155	5 517
1914	---	691	374	726	155	5 567
1920	2 114	2 166	1 423	2 589	490	14 187
1930	3 489	3 372	2 212	3 890	1 111	16 304
1940	4 951	5 204	3 207	6 157	1 317	24 249
1950	---	75 428	65 280	83 380	43 995	140 180
1952	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
1954	---	93 730	87 020	100 000	51 800	136 920

VI F : Laspeyres 34 article, base 1930
IA : Moyenne Arithmétique simple

XB : Premier et 3e quartile
XD : Premier et dernier indice

Nous sommes donc devant la situation suivante: on calcule de plus en plus d'indices, et on en a de plus en plus besoin. Cependant, on se trouve devant de multiples formules de calcul, telles qu'aucune d'elles ne peut être considérée comme parfaite, ou même comme l'emportant sur les autres de manière décisive. On peut seulement dire qu'un indice chaîne à pondération fixe ne doit être utilisé que sur une période très courte. Les autres indices semblent avoir tous une certaine valeur; chaque formule a ses avantages propres, mais aussi ses inconvénients et ses défauts. Une préférence pourrait cependant être donnée aux indices de Laspeyres, à cause de leur signification concrète et de leur relative facilité de calcul.

Un choix doit donc être fait en tout état de cause. Il convient de ne jamais oublier que c'est un choix. Il serait même souhaitable de pouvoir calculer, comme nous l'avons fait ci-dessus, plusieurs indices, et d'indiquer, comme dans notre tableau 21, quelques butoirs entre lesquels se situe la véritable variation de la réalité étudiée ... si tant est qu'elle est mesurable par un nombre unique.

B. DIVERGENCES DANS LE CHOIX DES SERIES ELEMENTAIRES

Tout calcul d'indice synthétique suppose un choix pour les séries élémentaires:

- s'il s'agit d'un indice de quantité (production industrielle), même si l'on décide qu'il doit être exhaustif, la répartition des industries en branches comporte une part d'arbitraire.

- s'il s'agit d'un indice de prix, plusieurs choix sont à faire. Nous les développons dans la suite de ce paragraphe.

Pour représenter la variation des prix dans un pays. Il est impossible de suivre tous les prix de tous les articles en vente. On choisit donc des articles ou des groupes d'articles représentatifs. De plus en plus, ce choix se fait à l'aide de l'observation des dépenses des ménages; ainsi les grandes catégories sont toutes représentées (par exemple: l'alimentation, et à l'intérieur de l'alimentation, le pain et la viande), mais le choix de l'article à observer reste difficile (faut-il prendre le pain de 2 kg. la baguette ou du pain enveloppé pour représenter le pain ?). Les statisticiens se guident au mieux sur l'usage des consommateurs, mais ce n'est pas simple. Deux statisticiens honnêtes, travaillant séparément, ne feront pas les mêmes choix.

En outre, il ne suffit pas de déterminer quel article on va observer mais il faut déterminer où on va faire cette observation: dans quel magasin, grande surface...?

Souvent, il faut aussi préciser la marque de l'objet. Les statisticiens et les enquêteurs se trouvent devant des décisions difficiles qu'ils prennent au mieux mais dont on ne peut que rarement dire que ce sont les seules possibles.

Que se passe-t-il alors si l'article choisi cesse d'être vendu? Or décide d'observer le prix du pain de 2 kg, mais la plupart des boulangers n'en vendent plus (et cessent, depuis quelques années, d'être obligés à le faire). On a choisi une marque et un modèle d'appareil de radio à transistor et ce modèle cesse d'être vendu. Ici encore, plusieurs options sont possibles: prendre un objet de même usage et de même qualité, prendre un autre objet dont la qualité est un peu supérieure, mais ne tenir compte que de la variation du prix ... Les problèmes sont d'autant plus difficiles qu'ils se posent pour chaque enquêteur et que le statisticien responsable ne peut que donner des directives générales et aider l'enquêteur à décider.

Nous donnons dans les pages suivantes (fig. 15) un exemple de recherche de prix dans un cas particulièrement simple (31). Loin d'enquêter dans quantité de points de vente, nous avons utilisé un seul catalogue de vente par correspondance, longtemps le plus renommé en France, celui de Manufrance; il s'agissait de suivre le prix de l'eau de Cologne sur une longue période. Le lecteur pourra constater que nous avons dû distinguer quatre produits différents (dans les quatre colonnes) et qu'en outre, pour chacun de ces produits des changements de détail apparaissent. Un choix a été fait, le prix retenu, mais un autre statisticien honnête aurait pu faire un autre choix.

Nous ne pouvons entrer dans le détail des nombreux moyens que les statisticiens ont mis en oeuvre pour répondre le moins mal possible ces problèmes.

Il faudrait un autre ouvrage pour en traiter [32].

Soulignons seulement cette nouvelle et importante cause de divergences.

FIGURE 15
EAU DE COLOGNE

Années	Prix observés				Prix retenus	Indice base 1949	Indice base 1914
	A	B	C	D			
1904	5.00					98	111
1905	5.00					98	111
1906	4.75				4.75	94	106
1907		2.75			4.35	86	97
1908		2.60			4.12	81	92
1909		2.60			4.12	81	92
1910		2.60			4.12	81	92
1911		3.00	4.75		4.75	94	106
1912		3.25	4.75		4.75	94	106
1913		2.75	4.50		4.50	89	100
1914		2.75	4.50		4.50	89	100
1920	10.00	14.00			14.00	276	311
1921	10.00	23.50			23.50	463	522
1922	9.75	16.00	19.00		16.00	315	356
1923	9.75	14.00	15.50		14.00	276	311
1924	10.00	15.50	15.00		15.50	305	344
1925	15.00	20.00	22.50		20.00	394	444
1926	14.00	21.00	25.00		21.00	413	467
1927	17.50	27.50	28.00		27.50	541	611
1928	17.50	27.00	30.00		27.00	531	600
1929	20.50	25.00	28.50		25.00	492	556
1930	21.00	25.00	29.00		25.00	492	556
1931	19.25	24.50	28.50		24.50	482	544
1932	18.50	(24.50)	(28.00)		27.84	548	619
1933	18.50	(24.50)	(24.50)		27.84	548	619
1934	18.50	(24.50)	(24.50)		27.84	548	619
1935		(22.50)	(24.00)		25.57	503	568
1936		25.50			25.50	502	567
1949				508		10 000	11 289
1950				485		9 547	10 778
1951				530		10 433	11 778
1952				660		12 992	14 667
1953				640		12 598	14 222
1954				640		12 598	14 222
1955				640		12 598	14 222
1956				655		12 894	14 556
1957				680		13 386	15 111
1958				795		15 650	17 667
1959				915		18 012	20 333
1960				9.15		18 012	20 333
1961				9.60		18 898	21 333
1962				10.35		20 374	23 000
1963				10.35		20 374	23 000
1964				10.45		20 571	23 222
1965				10.85		21 358	24 111
1966				11.95		23 524	26 556
1967				11.95		23 524	26 556

FIGURE 15

Sources: Catalogues Manufrance.

Colonne A :

- 1904 Page bleue 73, n° 647 B.
Eau de Cologne parfumée, qualité extra, pour l'entretien des cheveux et pour la toilette du corps et du visage, le 1/2 l.

Colonne B :

- 1907 P. 924, n° 3075.
Eau de Cologne "Diana" parfumée, pour la toilette du visage ou du corps, garantie 60% d'alcool, le 1/2 l.
1911 P. 936, n° 2530.
Eau de Cologne "Patria", pour la toilette du visage et du corps, garantie 60% d'alcool, le 1/2 l.
1913 P. 1080, n° 1765.
Eau de Cologne "Patria", garantie 65% d'alcool, pour la toilette du visage et du corps, massages, frictions, lotions, etc., le 1/2 l.
1926 P. 404, n° 21-2370.
Eau de Cologne "Patria", garantie 60% d'alcool, pour frictions, bains, massages, etc., le 1/2 l environ.
1932 P. 490, n° 35-4760.
Eau de Cologne "Patria", garantie pure 60%, qualité extra pour bains, massages, etc., le flacon de 49 cl.

Colonne C :

- 1911 P. 936, n° 2545.
Eau de Cologne "Patria" supérieure parfumée, pour la toilette du visage et du corps, garantie 76% d'alcool, le 1/2 l.
1923 P. 407, n° 21-3000 A.
Eau de Cologne "Patria" garantie 80%, très parfumée pour la toilette et tous usages hygiéniques, qualité extra, le 1/2 l.
1932 P. 490, n° 35-4765 A.
Eau de Cologne "Patria", garantie pure 80%, qualité extra supérieure, le flacon de 44 cl.
1936 P. 477, n° 35-1271 A.
Eau de Cologne "Patria" garantie pure 80% d'alcool, parfumée, le 1/2 l.

Colonne D :

- 1922 P. 407, n° 21-3001 A.
Eau de Cologne ambrée "Patria", extra-vieille, finement parfumée, le 1/2 l.
1926 P. 404, n° 21-2377 A.
Eau de Cologne ambrée "Patria", garantie 80%, extra-vieille et parfumée, le 1/2 l environ.
1932 P. 490, n° 35-4775 A.
Eau de Cologne ambrée "Patria", garantie 80%, rafraîchissante, très parfumée, le flacon de 44 cl.

1949 P. 124, n° 21-4145 B.

Eau de Cologne ambrée "Vallée des fleurs", à base d'alcool vieilli, le 1/2 l.

Pour maintenir une certaine homogénéité dans la série, le critère suivant a été retenu : "Eau de Cologne titrant environ 80% d'alcool, le 1/2 l". Cela a entraîné un certain nombre de calculs:

- Le raccord de l'eau de Cologne B à l'eau de Cologne C en 1914, pour maintenir le titrage à 80%.
- La conversion, pour les années 1932 à 1935, du flacon de 44 cl. en flacon de 50 cl.

L'indice se réfère::

- De 1904 à 1906 aux prix A.
- De 1907 à 1910 aux prix B raccordés en 1911 à la série C.
- De 1911 à 1931 et en 1936 aux prix C.
- De 1932 à 1935 aux prix du flacon C de 44 cl convertis en prix d'un flacon fictif de 50 cl.
- De 1949 à 1967 aux prix D.

C. DIVERGENCES DUES AUX PONDERATIONS ET AU CHOIX DE L'ANNEE DE BASE

D'autres causes de divergences sont les choix de pondération. Ces choix se présentent de deux manières:

- l'année de base étant choisie, on peut avoir à déterminer la population couverte. Un indice de prix à la consommation, par exemple, ne sera pas le même si l'on se réfère à un budget d'ouvrier ou à un budget de cadre, au budget de citadin ou à celui de villageois ...

- la pondération dépend aussi de l'année de base choisie. Pour un indice de prix, une base ancienne reflète une consommation ancienne, souvent à prépondérance alimentaire marquée alors que l'indice de base récente est à prépondérance secondaire ou tertiaire. Pour un indice de production, une base ancienne tient compte de prix anciens, souvent plus élevés que les prix actuels quand il s'agit de produits industriels à fort progrès technique, et par contre équivalents aux prix actuels pour les prix à progrès technique faible ou nul. La base ancienne surestime donc la progression.

C'est à cause de cette influence de l'année de base que nous avons relevé, au début de cette troisième partie, les dates de base des indices de la production industrielle dans différents pays. Les différences sont parfois importantes (bien que, dans la plupart des cas, elles aient été compensées par un changement de base depuis 1977; c'est ce qui s'est passé en Espagne).

Il convient, entout cas, d'être conscient que ces choix ont une influence sur la variation de l'indice.

D. EXISTE-T-IL UN INDICE SYNTHETIQUE UNIQUE? (EXEMPLE DES PRIX)

La hausse des prix n'existe pas. Cette formule un peu percutante de J.P. Piriou est certainement juste. La réalité, c'est que les prix varient, mais de façon en grande partie désordonnée; le taux d'inflation du Franc n'existe pas. Ce qui existe, c'est la variation du pouvoir d'achat du Franc lorsqu'on achète une certaine marque de saucisson ou de camembert et cette variation n'est pas la même pour le saucisson et pour le camembert ... Ce qui existe, c'est un foisonnement de prix et donc d'indices de prix. On ne peut caractériser réellement la hausse des prix que par une suite presque innombrable d'indices élémentaires.

Les tentatives qui sont faites actuellement ne visent pas tant à résumer en un seul tous ces indices élémentaires qu'à estimer la variation d'un budget représentant la consommation d'une personne ou d'une série de personnes: ceci, on y parvient à peu près lorsque cette consommation ne change pas ... mais elle change avec le temps (et d'ailleurs avec l'évolution des prix).

Il est important d'être bien convaincu qu'il n'existe pas réellement un taux d'inflation ou une augmentation du niveau général des prix. Cependant, les usagers constatent, dans beaucoup de pays, que la plupart des prix montent; ils désirent connaître une mesure de cette augmentation. D'où les calculs d'indices du coût de la vie ou des prix à la consommation. Il faut être conscient qu'ils ne mesurent pas le coût de la vie, mais des variations du coût d'un panier de consommation bien défini et partiellement arbitraire, c'est-à-dire une moyenne d'indices élémentaires, alors qu'il peut exister d'autres moyennes des mêmes indices élémentaires et aussi d'autres indices élémentaires à prendre en considération.

La seule manière de connaître l'évolution des prix serait de connaître chacun des indices élémentaires. L'ennui est que l'esprit humain n'est capable que d'une idée à la fois et qu'un gros tableau de chiffres (ou une série d'achats effectués) ne lui laisse qu'une impression partielle. Lorsqu'on se plaint de la vie chère ou de l'augmentation des prix, on se base souvent sur des observations insuffisantes: j'ai acheté tel objet: son prix a augmenté de tant sur celui du même objet il y a un mois (... mais j'oublie pendant ce temps là que j'ai acheté d'autres objets dont le prix n'a pas monté) ou encore: j'ai été dans une grande surface et j'ai dépensé plus que la dernière fois (mais, ai-je acheté les mêmes choses?) ... Ces exemples montrent la difficulté d'appréhender tout le réel en même temps ... Dieu seul peut le faire; l'homme n'en est pas capable.

Les paragraphes qui suivent sont destinés à donner des exemples de ce qu'il serait nécessaire de faire pour relativiser les indices synthétiques dans l'esprit des utilisateurs et du grand public: si la hausse des prix n'existe pas, et si l'on calcule quand même un indice synthétique pour la représenter, il convient de montrer que cet indice ne mesure pas la réalité (dont nous venons de dire qu'elle n'existe pas) avec précision, mais qu'il n'est qu'un ordre de grandeur, dont il serait bon de montrer avec quel degré d'approximation il est déterminé.

a) Dispersion des indices

1. Position du problème

Si tous les indices élémentaires que l'on veut résumer par un indice synthétique, sont égaux, l'indice synthétique est égal à ces indices élémentaires: dans ce cas, il est vrai exceptionnel, l'indice synthétique existe et est précis.

Si, à l'autre extrême, certains des indices élémentaires baissent beaucoup, tandis que d'autres augmentent beaucoup et certains restent stables, la dispersion des indices élémentaires est importante: l'indice synthétique qui tend à représenter ces indices élémentaires n'est pas déterminé de façon précise: selon le choix de la formule ou de la pondération, on peut trouver plusieurs indices synthétiques assez différents les uns des autres.

Entre les deux extrêmes, si les indices élémentaires sont un peu dispersés, l'indice synthétique n'est pas unique, mais les indices synthétiques de formules ou de pondérations différentes ne sont pas trop différents entre eux.

Le remède à cet état de choses ne peut être de renoncer à publier un indice synthétique, car la pression des gouvernements et du grand public est trop forte, mais ce peut être de toujours publier les indices synthétiques avec une caractéristique de dispersion. Ainsi, l'utilisateur saura dans lequel des trois cas cités ci-dessus se place l'indice global dont il a connaissance. On ne devrait jamais publier une série d'indices sans publier en même temps la dispersion des données à l'aide desquelles cet indice est calculé (33).

2. Notion de dispersion

Il convient de préciser ce que dispersion. Un exemple peut permettre de comprendre cette notion. Supposons que l'on ait deux séries d'indices élémentaires:

94	98	100	103	105
et				
70	90	100	115	125

Ces deux séries apparaissent différentes. Or, leur moyenne arithmétique simple à toutes deux est égale à 100, ainsi que leur médiane. Les deux séries peuvent donc être représentées par un même indice synthétique. Ce qui fait leur différence, c'est la dispersion des indices élémentaires.

Cette dispersion peut être mesurée à l'aide d'un certain nombre de caractéristiques.

On peut caractériser les deux séries par leur étendue (11 points pour la première, 55 points pour la seconde) ou par leur écart absolu moyen (3,2 points pour la première, 16 pour la seconde) ou mieux encore par leur **écart-type** (3,85 pour la première et 19,2 pour la seconde). Dans tous les cas, on voit que la dispersion de la seconde est plus forte que celle de la première (environ 5 fois plus forte).

3. Présentation des résultats

Il semble que les indices synthétiques pourraient être présentés avec les écarts-types correspondants. Par exemple, on dirait que la première série a pour indice synthétique 100 et pour écart-type 3,86 ou que la série des indices de 1982, base 1960 du tableau 5 a pour indice synthétique 1 043,1 (Moyenne arithmétique) avec un écart-type de 295 points. Le lecteur est ainsi informé que tous les indices ne sont pas parallèles dans leur évolution et il a une idée de leur dispersion.

b) Notion d'erreur

Dans les sciences physiques, la notion d'erreur est bien en place. Aucun physicien, même encore étudiant, ne présente de résultat sans faire en même temps un calcul d'erreur.

L'erreur, telle qu'elle est définie dans les sciences exactes, est la différence entre la valeur estimée à d'un nombre et sa valeur exacte a . Cette différence n'est pas connue, car la valeur exacte ne l'est pas. On calcule alors un majorant de l'erreur.

Mais en ce qui concerne le calcul d'un indice synthétique, le problème est que la valeur exacte n'existe pas. Dans une récente intervention (34) Mrs Barbara Baillar du Bureau of Census des Etats-Unis, affirmait, après beaucoup d'autres, que la valeur exacte d'une donnée économique ne peut être définie que comme celle qui est obtenue en utilisant une méthode sur laquelle les experts sont d'accord. Il n'y a pas de vraie valeur, mais seulement un résultat sur lequel il peut y avoir un certain consensus scientifique. Nous avons d'ailleurs vu qu'en matière d'indices, ce consensus même est très relatif et que des statisticiens intègres peuvent employer des méthodes tout à fait acceptables scientifiquement et trouver des résultats différents.

On peut conclure qu'il n'existe pas d'indice synthétique unique ... et que parfois même ce que l'indice cherche à mesurer n'a pas de mesure ...

Un piste de recherche importante à l'heure actuelle consisterait à chercher ce qui doit remplacer l'erreur quand il s'agit d'un calcul d'indices: une indication qui donnerait une idée d'un degré d'approximation. On ne dirait plus: l'indice synthétique vaut tant, mais une idée de l'évolution du coût de la vie (ou d'une autre réalité) peut être donnée à l'aide d'un indice qui vaut entre tant et tant. Cela éviterait, en tout cas, les batailles sur la dernière décimale d'un indice synthétique, calculé en glissement par rapport au mois précédent, car la signification scientifique de cette dernière décimale est pratiquement inexistante.

En attendant de trouver cette indication qui remplacerait l'erreur, il serait peut-être souhaitable de publier plusieurs indices, ou un indice double, ou encore un indice synthétique accompagné d'une caractéristique de dispersion (écart-type).

3. INDEXATION. MESURE DU POUVOIR D'ACHAT

A partir d'un certain nombre d'exemples, nous montrerons les principaux usages qui sont faits des indices de prix et particulièrement des prix à la consommation dans la vie courante. Nous serons ensuite amenés à nous poser la question: peut-on mesurer le pouvoir d'achat, ou du moins ses variations?

A. ACTUALISATION DES DONNEES. INDEXATION

Premier exemple: l'indice des loyers a augmenté de 10% dans l'année. Quel doit être le montant de mon loyer, sachant qu'il était l'année dernière de 5 600 F?

Tout se passe comme si l'indice des loyers passait de 100 à 110. Mon loyer, indexé sur cet indice, devient:

$$5\ 600 \times \frac{110}{100} = 6\ 160 \text{ F}$$

Deuxième exemple: une terre de Beauce est louée, en 1983 12 500 F, indexée sur le prix du blé. Le prix du blé passe de 97 F le quintal en 1979 à 132 F en 1983. Quel doit être le montant du loyer en 1983?

La hausse du loyer doit être proportionnelle à celle du prix du blé. La loyer en 1983 doit donc être:

$$12\ 500 \times \frac{132}{97} = 17\ 010,31 \text{ F}$$

(132/97 est l'indice du prix du blé).

Troisième exemple: le prix d'un automobile 2 CV Citoën en 1949 était de 229 000 Francs (anciens). A quel prix 1983 correspond ce prix de 1949?

Plusieurs solutions sont possibles, chacune présentant son intérêt particulier:

1^o Le prix de la 2 CV en 1983 est de 28 280 F. Il y a une correspondance certaine entre les deux prix, puisque ce sont ceux que verse l'acheteur à ces deux dates. Mais:

- la 2 CV a changé. Celle de 1983 est plus performante que celle de 1949. Il s'agit d'une 2 CV 6 (spécial 4).

- en l'absence d'autre élément de comparaison, rien ne permet de savoir s'il est plus facile à un Français d'acheter une 2 CV en 1983 qu'en 1949.

2^o On peut chercher à déflater le prix de 1949 pour le transformer en francs constants de 1983. Pour cela, on relève l'indice du coût de la vie de 1949 à 1983 et on multiplie le prix 1949 par cet indice.

Pour connaître l'indice du coût de la vie en France de 1949 à 1983, il convient d'effectuer des raccordements, à partir des indices de l'INSEE:

Le dernier indice publié sur base 1970 (mai 1983) vaut 345,5. L'INSEE donne les coefficients de raccordement (basés sur les théories indiquées ci-dessus) dans les Annuaires Statistiques.

TABLEAU 22

Coefficients de raccordement permettant de ramener les indices sur les bases 1962, 1956-1957, 1949, 1938 et 1914	
Coefficients pour ramener l'indice mensuel national des prix à la consommation des ménages urbains dont le chef est employé ou ouvrier (1970 = 100) sur la base 100:	
1962	1,372
1 ^{er} juillet 1956 - 30 juin 1957	1,943
1949	2,852
1938	47,80
1914	337,5

Source: Annuaire Statistique de la France, 1973, p. 513

Ce tableau indique que pour ramener l'indice mensuel national des prix à la consommation à la base 100 en 1949, il faut la multiplier par 2,852. L'indice en mai 1983 sur origine 1949 est alors:

$$345,5 \times 2,852 = 985,37$$

Pour estimer 229 000 F de 1949 en francs constants de 1983, on effectue le produit de ce prix par l'indice. On divise par 10 000: une fois par 100 pour passer de l'indice à un coefficient multiplicateur, l'autre fois par 100 pour passer des anciens francs aux nouveaux:

$$\frac{229\ 000 \times 985,37}{10\ 000} = 22\ 565\ F$$

Ce prix est un peu inférieur à celui pratiqué en 1983. Le résultat tendrait donc à prouver d'achat du salarié aurait un peu monté de 1949 à 1983 en ce qui concerne la 2 CV! En fait, cela prouve seulement que le prix relatif de la 2 CV a augmenté, nous allons le voir.

3^e Une solution meilleure consiste à calculer combien d'heures un salarié bien déterminé (le même en 1949 et en 1983) doit travailler pour acheter une 2 CV. Il s'agit de la méthode des **prix réels** dont il a déjà été question.

La méthode, préconisée par Jean Fourastié, consiste à utiliser le salaire horaire total (charges sociales comprises) d'un manœuvre (35) ouvrier.

En 1949, ce salaire était de 74,15 francs (anciens).

En 1983, il est de 31,13 francs (nouveaux).

Le prix réel, nombre d'heures qu'un manœuvre doit consacrer à l'achat d'une 2 CV, à peu près équivalent au nombre d'heures d'équivalent manœuvre (36) nécessaires à la fabrication de la 2 CV, en comptant le travail à l'usine et le travail nécessaire à l'extraction des matières premières et à la fabrication des produits semi-finis utilisées est alors:

$$\text{en 1949: } \frac{229\ 000}{74,15} = 3\ 088 \text{ salaires horaires}$$

$$\text{en 1983: } \frac{28\ 280}{31,13} = 908 \text{ salaires horaires}$$

Il en résulte que le prix de la 2 CV correspondait environ à 15 mois de salaire d'un manœuvre en 1949. En 1983, il ne correspond plus qu'à 5 mois de salaire. On comprend pourquoi presque tous les Français ont une automobile en 1983, alors qu'en 1949, fort peu en avaient. (D'après l'*Annuaire Rétrrospectif* de l'INSEE 1961, le nombre de voitures particulières neuves immatriculées en 1949 était en France de 115 857; en 1981, d'après l'*Annuaire* 1982, il était de 1 834 261 soit plus de 15 fois plus (en 1949, un Français sur 500 a acheté une voiture neuve; en 1981, un Français sur 28 en a acheté une)).

Reprenons alors le résultat du 2^e: en francs constants 1983, la 2 CV de 1983 vaut un peu plus cher que celle de 1949. Que signifie cela? Tout simplement que le prix de l'automobile a monté à peu près comme l'indice du coût de la vie. Le tableau 23 (37) montre que certains prix ont monté plus vite que l'indice, d'autres moins vite. Les indices élémentaires 1982-1925 sont les rapports des prix nominaux; le coefficient 2,8 pour l'indice INSEE correspond en fait à une multiplication de l'indice par 280 (divisé par 100 pour rendre comparables les anciens francs et les nouveaux). 1925 et 1974 sont deux années où les prix sont comparables: le prix en anciens francs de 1925 est à peu près celui en nouveaux francs de 1974. (Coefficient de variation de l'indice du coût de la vie: 1,00).

Les salaires des manœuvres ont monté plus vite que tous les prix et indices: le pouvoir d'achat des manœuvres a augmenté fortement sur la période. Les services, la terre de Beauce, l'or, ont également beaucoup augmenté, les produits agricoles un peu moins.

TABLEAU 23
DISPERSION DES PRIX 1925-1974-1982

	1925 (anciens francs)	1974 (nouveaux francs)	1982 (nouveaux francs)	indices élémentaires 1982 / 1925
Indice INSEE du coût de la vie				2,8
Salaire horaire total du manœuvre	2,12	8,73	28,08	13,2
Salaire annuel total du manœuvre ²	5 100	17 450	51 500	10,1
Or (Napoléon) ³	80 (3)	260	632	7,9
Un hectare bonne terre en Beauce ⁸	6 000	20 000	37 000	6,2
Coupe de cheveux (hommes)	2,5 à 3	7 à 9	26,63	9,7
Place de cinéma de "quartier"	3	8	20	6,7
Ticket de métro (2 ^e classe)	0,39	0,80	2,03	5,2
Beefsteak (1 kg)	18,47	30,78	66,35	3,6
Vin ordinaire (1 l)	1,34	2,26	5,10	3,8
Petit pois	3,25	4,56	10,95	3,4
Lait (1 l)	1,10	1,36	3,25	3,0
Camembert	3,80	3,81	8,50	2,2
Farine (1 kg)	2,27	2,27	4,43	2,0
Crayons Conté (la douzaine)	5,00	5,00	12	2,4
Merlans (1 kg)	6,38	5,96	16,05	2,5
Jambon de Paris (1 kg)	29,10	23,43	56,65	1,9
Beurre laitier (1 kg)	18,54	13,52	26,20	1,4
Bicyclette ⁴	425	320	790	1,9
Oeufs (la douzaine)	8,37	5,45	8,51	1,0
Confiture ⁵	3,20	4,50	9,34	2,9
KWH d'électricité ⁶	1,00	0,48	0,48	0,5
Ampoule électrique	17,50	2,10	4,10	0,3
Récepteur de radio ⁷	2 700	300	169	0,1

(1) Fin de l'année

(2) 2 400 heures de travail en 1924

(2) 2 000 heures de travail en 1974 et 1 983 heure en 1982

(3) Marché libre (cours officiel 20 F)

(4) La moins chère du catalogue Manufrance (la Redoute depuis 1980)

(5) Pur fruit, pur sucre, cerises en 1925, abricots en 1974 et 1982

(6) Première tranche en 1974, heures pleines en 1982

(7) En 1925, 5 lampes GO-PO; en 1974 et 1982, GO-PO-FM

(8) Moyenne en Eure et Loire. Source: Ministère de l'agriculture

Ont baissé par rapport à l'indice du coût de la vie: certains produits agricoles, et des produits manufacturés (à fort progrès technique). L'automobile se situe en dessous de l'indice depuis 1925, mais non, comme nous venons de le voir, depuis 1949. (Voir tableau 23).

Cet exemple montre la difficulté de l'interprétation de l'indice raccordé à long terme. On ne peut compter sur lui pour estimer le pouvoir d'achat. Pendant la période où le même indice est conservé, cet indice estime le pouvoir d'achat d'une somme dont dispose un consommateur dont la consommation est bien déterminée. Mais lorsqu'on change d'indice, on ne sait plus quel consommateur on suit; or, il est clair que, depuis 1949, le niveau de vie du consommateur moyen suivi par l'INSEE dans ses indices a beaucoup monté.

Quatrième exemple: Que signifient les agrégats de la comptabilité nationale calculés à prix constants? (38).

On se sert de la relation:

$$\text{valeur} = \text{quantité} \times \text{prix} \text{ ou plutôt } V = L(q) \times P(p)$$

D'où l'on déduit:

Valeur = volume x Variation de prix entre l'année de base et l'année observée.

Ainsi, on estime la variation de la production du charbon, en maintenant artificiellement le prix du charbon au niveau moyen qu'il avait l'année choisie pour base et on mesure la variation de valeur due à la seule variation du volume. On identifie donc le volume à la valeur à prix constant. Le tableau 24 (39) montre comment, en faisant des produits d'indices de prix et d'indices de volume, un parvient à connaître les principaux agrégats de la comptabilité nationale à prix constants ou à prix courants.

TABLEAU 24
FICHE D'EQUILIBRE DES RESSOURCES ET EMPLOIS
POUR UN PRODUIT X

	1978	Indice de volume 79 / 78	1979 aux prix de 78	Indice de prix 79/78	1979 aux prix de 79
Ressources					
Production	900	110	990	105	1 040
Importation	100	105	105	100	105
Total	1 000		1 095		1 145
Emplois					
Consommations intermédiaires	340	107	365	107	389
Consommation des ménages	400	110	440	103	453
Formation brute de capital fixe:					
- des entreprises (sociétés et entreprises individuelles) ..	60	105	63	105	66
- des ménages (hors entreprises individuelles)	-	-	-	-	-
- autre	-	-	-	-	-
Variation de stocks	100	137	137	100	137
Exportations	100	90	90	111	100
Total	1 000		1 095		1 145

Cinquième exemple:

Mon salaire mensuel est passé de 1980 à 1983 de 5 000 F à 6 500 F. Y a-t-il eu hausse de mon **pouvoir d'achat**?

A cette question, il n'existe pas de réponse unique.

1º La première qui vient à l'esprit consiste à comparer la hausse de mon salaire à celle de l'indice des prix:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{6\ 500}{5\ 000} = 1,30$$

Or l'indice a varié de $I_0 = 100$ à $I_1 = 138$ (indice base 100 l'année 1980).

Cela ne signifie pas que mon pouvoir d'achat a diminué de 8% (138 - 130) mais que le salaire de 5 000 F vaut en Francs constants 1983: $5\ 000 \times 138 = 6\ 900$ F.

Si mon salaire est en 1983 de 6 500 F, je gagne 400 F de moins en Francs constants qu'en 1981, soit:

$$\frac{-400}{6\ 900} \times 100 = -5,80$$

5,80% de moins.

On peut encore écrire que l'indice du pouvoir d'achat est:

$$\frac{S_1}{S_0} : \frac{I_1}{I_0} = \frac{130}{138} = 0,9420$$

ce qui donne le même résultat.

2º La véritable réponse serait de calculer quels achats sont possibles pour moi aujourd'hui, lesquels l'étaient en 1980 et de les comparer. Mais la réponse n'est pas la même si j'achète des automobiles ou des postes de radios, des ampoules électriques ou des petits pois. Mon pouvoir d'achat a augmenté pour certains produits, stagné ou même diminué pour d'autres.

La pratique actuelle, qui consiste à indexer les salaires sur un indice pour maintenir le pouvoir d'achat, est rassurante pour les salariés, mais elle n'est pas efficace pour l'ensemble de l'économie. En effet, les producteurs, devant payer des salaires plus élevés, voient leur prix de revient augmenter et par conséquent ne peuvent qu'augmenter leurs prix de vente. Alors l'indice monte, et de nouveau les salaires doivent augmenter. C'est une spirale inflationniste de laquelle beaucoup de pays essayent de se dégager, mais non sans peine.

B. MESURE DU POUVOIR D'ACHAT

Les exemples qui précédent, particulièrement celui du prix de la 2 CV et celui du pouvoir d'achat du salarié, montrent qu'il est difficile de cerner l'évolution du pouvoir d'achat, même en se limitant à un pays et à une catégorie particulière de personnes dans ce pays.

Il est clair que les indices calculés dans la plupart des pays ne sont pas conçus pour répondre à cette question, bien qu'on les utilise souvent, au moins à court terme, pour cela. En effet, qu'il s'agisse d'indices de prix à la consommation calculés à l'aide de la formule de Laspeyres ou sous forme de chaîne-Laspeyres, le budget sur lequel sont déterminées les pondérations change souvent pour être adapté à la consommation actuelle. Dans tous les pays développés, la consommation est fortement croissante et surtout a crû pendant la période qui a suivi la seconde Guerre Mondiale et a duré jusqu'au premier choc pétrolier (*Les Trente Glorieuses*). Les indices reflètent cette consommation croissante par

leurs pondérations. C'est ainsi, nous l'avons vu, que l'indice français a évolué à peu près comme le prix de la 2 CV depuis 1948, alors qu'il est indiscutable que le pouvoir d'achat des Français en matière d'automobiles a beaucoup augmenté.

Que peut-on faire alors pour mesurer l'évolution du pouvoir d'achat?

- d'abord, savoir que cette mesure n'existe pas réellement. Ce qui existe, c'est le pouvoir d'achat en automobile, ou en saucisson ou en n'importe quel produit. Il y a en général progression du pouvoir d'achat en ce qui concerne les produits du secteur secondaire, à fort progrès technique, alors qu'il n'y en a pas en ce qui concerne les services.

- ensuite, pour mesurer le pouvoir d'achat relatif à chaque produit, la meilleure méthode est celle des prix réels ou prix salariaux dont nous avons déjà amplement parlé. Dire que le prix de la 2 CV en France est passé de 3 088 salaires horaires de manœuvre à 908 entre 1949 à 1983, c'est énoncer une réalité claire: le pouvoir d'achat du manœuvre Français qui désire acheter une 2 CV a plus que triplé ... Cette analyse est utile, mais il ne faut pas perdre de vue que, dans le même temps, le même manœuvre paie toujours à peu près un salaire horaire pour se faire couper les cheveux: dans ce domaine, son pouvoir d'achat n'a pas progressé. La réalité est faite d'une multitude d'évolutions de prix réels, dont certains ont baissé - souvent fortement - tandis que d'autres ont stagné. (Ce n'est que très exceptionnellement que le prix réel augmente, et, en général, pour une courte période).

- si l'on tient absolument à mesurer l'évolution du pouvoir d'achat par un seul chiffre, la moins mauvaise solution serait probablement un indice de Laspeyres dont on ne changerait pas la base (40). Mais on se heurte alors aux difficultés dont nous avons déjà parlé: changement de qualité, changement de produits, disparition de certains, apparition d'autres ...

CONCLUSION

Au terme de ce travail, deux principes doivent être rappelés: la nécessité des calculs d'indices et leur relativité. Le calcul des indices synthétiques est un besoin dans bien des domaines de la science; mais ce calcul est difficile, et ne donne pas les résultats infaillibles que désirerait trouver le néophyte.

En 1914, W.C. Mitchell écrivait: (on emploie les indices) "à montrer la dépréciation de la monnaie, la hausse du coût de la vie, les alternances de prospérité et de dépression dans les effectifs, les corrections à apporter aux comparaisons de la fortune nationale ou de revenus privés aux diverses époques; on les cite pour prouver que les salaires doivent être augmentés, diminués, que les trusts ont manipulé le prix de leurs produits pour le bien ou au détriment du public, que les tarifs douaniers ont été favorables ou défavorables aux producteurs ou aux consommateurs, que l'émigration doit être encouragée ou restreinte, que le système monétaire doit être réformé; que les ressources naturelles ont déjà diminué ou que le dividende naturel est en augmentation. On y recourt pour expliquer pourquoi les valeurs ont baissé et pourquoi le taux de l'intérêt a augmenté, pourquoi les dépenses publiques sont en augmentation, pourquoi le malaise social prévaut dans certaines années, pourquoi l'agriculture est prospère ou le contraire, pourquoi le chômage varie, pourquoi l'or est importé ou exporté, etc..." (41). Cette description devrait être maintenant complétée par les "mille" autres usages qui sont faits des indices à l'heure actuelle. Il suffit, pour comprendre leur importance, de réfléchir aux conséquences des variations d'un indice sur les salaires, les revenus indexés, etc. En dehors de la science économique, des problèmes analogues se posent également en démographie, en biologie, et généralement partout où l'on doit recourir à des synthèses statistiques.

Pourtant "le danger contre lequel il importe de réagir consiste plutôt dans l'exagération du sentiment de confiance qui prédomine, étant donné la perfection des matériaux et le soin avec lequel les méthodes sont discutées et choisies" (42).

La confiance que le grand public accorde à l'heure actuelle à tout indice est certainement en effet un danger, car elle consiste à considérer comme absolu un résultat qui n'a qu'une valeur relative. Il importe de savoir que si on avait pris une autre méthode de calcul, on aurait en général obtenu un résultat différent.

Les réflexions qui précédent, pourraient inviter à une condamnation de tous les indices synthétiques de prix. Cependant, il faut bien reconnaître qu'il est impossible à l'heure actuelle de s'en passer. L'esprit humain est incapable de "voir" les variations de tous les prix à la fois; il faut résumer ces variations d'une façon ou d'une autre, en un indice synthétique.

Donc, il faut faire usage des indices, mais sans perdre de vue qu'ils ne sont pas parfaits. Dans son Traité de statistique, Huber dit que le rayon d'un cercle est plus facile à saisir que la surface de ce cercle; puisque il y a une relation qui est toujours la même entre le rayon du cercle et sa surface, le rayon peut être considéré comme mieux qu'un indice de la surface; tout au moins, c'est un indice parfait. "En matière économique, nous sommes toujours dans l'incertitude indiciaire; il y a toujours un écart, un hiatus entre le concept et la mesure, et la correspondance entre le concept et la mesure reste toujours la grande difficulté de nos investigations économiques" (43).

Un indice synthétique tend à résumer en une seule quantité de séries élémentaires; tout ce qu'on peut exiger est qu'il donne une image acceptable de l'ordre de grandeur des effets que les éléments qui y interviennent exercent sur un phénomène défini.

Il ne faut pas s'étonner si les indices synthétiques d'une même population de séries élémentaires sont nombreux, alors que l'esprit humain a tendance à imaginer qu'il ne devrait y en avoir qu'un. En fait, il existe autant d'indices que le statisticien veut en construire; et chacun a la signification qui résulte de son calcul même. Parmi tous ces indices, l'économiste devrait pouvoir choisir celui qui lui paraît le mieux correspondre à l'étude qu'il veut faire.

La difficulté est bien que la plupart des usagers raisonnent pour les indices comme pour les thermomètres: "peu importe, en réalité, le choix du thermomètre: l'essentiel est qu'il soit bien construit, suffisamment précis, et qu'on n'en change pas en cours d'expérience" (44). En fait, une réalité économique n'est pas mesurable de façon aussi précise qu'une température! Il importe que tous les usagers des indices aient la conviction de cette "incertitude indiciaire".

Par conséquent, une mesure élémentaire de prudence vis-à-vis de ces indices sera de ne considérer leurs variations que si elles sont suffisamment importantes. "Un changement de pression de quelques millimètres n'est pas pris en considération par le promeneur qui consulte le baromètre: un changement de quelques points a moins de signification encore à ce baromètre économique, parfois construit de façon assez sommaire, que sont les nombreux indices" (45).

Surtout, il importe que la méthode de calcul soit toujours publiée en même temps que l'indice synthétique lui-même, et que les utilisateurs lisent et comprennent cette "notice", véritable "mode d'emploi". "La cause principale des difficultés d'interprétation vient de ce qu'un indice général des prix peut être envisagé de divers points de vue et que, suivant le mode d'établissement de l'indice, celui-ci peut s'adapter plus ou moins bien au but que l'on s'est proposé. Il en résulte qu'il est absolument indispensable, lorsqu'on veut utiliser un indice, de connaître exactement la méthode d'après laquelle il a été construit, cette connaissance permettant seule de juger quelle peut être la valeur significative de l'indice, dans quelles limites on doit restreindre les conclusions qu'il permet de formuler" (46).

Le choix de la formule dépend donc de l'usage qu'on veut faire de l'indice. Il faut toujours indiquer quelle est cette formule, et ne jamais perdre de vue qu'elle n'est pas universelle. Dans beaucoup de cas, la seule méthode correcte est de se référer à plusieurs formules d'indices synthétiques, qui permettront de connaître entre quelles limites se trouve la réalité qu'on veut saisir.

Il y aurait aussi à approfondir la notion d'erreur en statistique, de façon à être capable d'indiquer le degré d'approximation de chaque chiffre publié ... Ceci, toujours, en supposant que la réalité que l'on cherche à apprécier est mesurable ce qui reste à prouver!

Les idées fortes que nous aurions voulu transmettre dans ce cours sont les suivantes:

- L'indice n'a pas toujours tout le pouvoir d'information que l'on désirerait en lui.
- Il n'existe pas de moyen infaillible de connaître l'augmentation du coût de la vie ou celle de la production industrielle. Tout résultat est relatif: avec les mêmes données, on peut obtenir des taux d'accroissement différents selon la formule de calcul choisie et, bien entendu, le choix des données a également des conséquences sur l'indice!.
- Cependant les indices synthétiques représentent encore la meilleure manière connue de résumer des données nombreuses.

NOTES

- (1).- Etudes et Conjonctures, n° 4, INSEE, Paris, avril 1960, p. 304. Tout ce numéro est consacré aux "variations saisonnières de l'activité économique".
- (2).- Zéro est un indice au sens II du Petit Robert; j'également.
- (3).- Le seul inconvénient de cette méthode est la perte de précision, car il faudrait garder beaucoup de décimales à l'indice de base 1960 pour en déduire un indice base 1979 exact avec une précision suffisante. En outre, si une erreur de calcul a été commise dans le calcul de l'indice base 1960, cette erreur se retrouve dans l'indice base 1979. C'est pourquoi il est conseillé de repartir le plus souvent possible des données brutes.
- (4).- A. JULIN, Principes de statistique théorique et appliquée, t. II, Paris et Bruxelles, 1923.
- (5).- Nous distinguons les mots base et origine, cf. ci-dessus.
- (6).- M.G. PIERSON, "Further consideration on index numbers", Economic Journal, mars 1896, p. 127-132.
- (7).- L. MARCH, "L'étude statistique du mouvement général des affaires", Journal de la Société de Statistique de Paris, juillet-septembre 1923, p. 251-281.
- (8).- J. LEJEUNE, Les méthodes de construction des index-Numbers, Paris, 1935.
- (9).- Les nombres indices de la variation des prix, Paris, 1927, p. 131.
- (10).- L'indice monétaire et la théorie de la monnaie, Paris, 1926, p. 12 à 18.
- (11).- Pour le pain $((23 \times 0,62)/67,5) \times 100 = 21,1$ (poids 23 kg, multiplié par le prix du pain en 1960, 0,62 F, divisé par la somme des produits quantités-prix en 1960: 67,5 : On trouve de même les autres coefficients de pondération.
- (12).- D'après M.P. MOUCHEZ, Les indices de Prix, Cujas, Paris, 1961, p. 56.
- (13).- Voir Jacqueline FOURASTIE, Les formules d'indices de prix, Armand Colin, Paris, 1966, p. 123.
- (14).- J.P. PIRIOU, L'indice des Prix, La Découverte/Maspéro, Paris, 1983, p.14.
- (15).- "The making and using of index numbers", Bulletin of U.S. Bureau of Labor Statistics, 2e édition, octobre 1921, n° 284, p. 40.
- (16).- M. VACHER, Statistiques économiques et sociales, cours de l'I.S.U.P., I.N.S.E.E., 1960, p. 60.
- (17).- E. MORICE et F. CHARTIER, Méthode statistique, 1954, tome 1, p. 170.
- (18).- Voir Jacqueline FOURASTIE, Les formules d'indices de prix, 1966, p. 141. Un tableau plus détaillé de ces résultats est présenté dans la 3e partie de ce cours. (Tableau 20).
- (19).- Cf. Jacqueline FOURASTIE, Les formules d'indices de prix, Armand Colin, Paris, 1966, p. 150 à 162.
- (20).- Sur cette théorie et sur l'indice "vrai du coût de la vie, voir les indices de prix, de M. Ph. MOUCHEZ, Paris, Cujas 1961, p. 29-39 et N.T. JAZAIRI, The present state of the theory and Practice of index numbers, contribution invitée à la 44^e session de l'Institut International de Statistique, Madrid 1983. Nous utilisons ce dernier article dans la suite de ce paragraphe. Voir aussi J.P. PIRIOU, L'indice des prix, Paris, La Découverte/Maspéro, 1983, p. 101.
- (21).- Salem H. Khamis, "Application of index numbers in international comparisons and related concepts", Contribution invitée à la 44^e session de l'Institut International de Statistique, Madrid, 1983.
- (22).- Cf. Michel Lévy, L'information statistique, Paris, Seuil, 1975.
- (23).- R.C. Geary, "A note on the comparison of Exchange Rates and Purchasing Power between Country", Journal of the Royal Statistical Society, 1958, A. vol. 121, p. 97.
- (24).- Cf. R.C. Geary et Salem H. Khamis, op. cit. ci-dessus.
- (25).- Jean Fourastié, Le Grand Espoir du XX^e siècle, col. "Idées", Paris Gallimard (1^{re} édition, P.U.F., Paris, 1949) et Productivité, Prix et Salaires, Paris, O.C.D.E., 1957 (édité simultanément en anglais).
- (26).- Cf. Jean et Jacqueline Fourastié, Pouvoir d'achat, Prix et Salaires, Paris, Gallimard (col. "Idées"), 1974, Jean Fourastié et Béatrice Bazil, Pourquoi les Prix Baissent, Hachette (col. "Pluriel"), 1984, et les travaux antérieurs de Jean Fourastié.
- (27).- D'après M. Lévy, L'information statistique, Seuil, Paris, 1975, p. 145.
- (28).- Cf. André L.A. Vincent, La mesure de la productivité, Dunod, Paris, 1968.
- (29).- 1977 Supplement to the Statistical Yearbook and the Monthly Bulletin of Statistics, (Methodology and Definitions), United Nation.
- (30).- Jacqueline Fourastié, Les formules d'indices de Prix, Armand Colin, Paris, 1966.
- (31).- Source: Rémy ALASSEUR, Jacqueline FOURASTIE, Jean GUILHEM, sous la direction de Jean Fourastié, Documents pour l'élaboration d'indices du coût de la vie en France de 1910 à 1965, Mouton, Paris, la Haye, 1970.
- (32).- Les statisticiens de tous les pays indiquent, dans des ouvrages méthodologiques, comment ils élaborent leurs indices. Signalons, en France: INSEE, Pour comprendre l'indice des prix, Imprimerie Nationale, Paris, 1977; Une étude critique de la méthodo-

- logie a été vulgarisée par J.P. Piriou, L'indice des prix, La Découverte/Maspero, Paris, 1983. Des recherches nombreuses portent sur ces questions. Signalons l'une des dernières, au plan international: J.L. NORWOOD, "Problems in Measurement of Consumer prices", Institut International de Statistique, Madrid, 1983, (Communication invitée).
- (33).- Maurice Olivier, les nombres indices de la variation des prix, Paris, 1927.
- (34).- The quality of Statistical Data, communication invitée à la 44^e session de l'Institut International de Statistique, Madrid, 1983. Elle cite entre autres: W.E. DEMING, Some theory of Sampling, John Wiley and Sons, New York, 1950 et C. EISENHART "Realistic Evaluation of the Precision and Accuracy of Instrument Calibration Systems", Journal of Research of the National Bureau of Standards, Engineering and Instrumentation, Vol. 67 C, n° 2, ap-june 1963, p. 161-187; cf. aussi O. MORGESTERN, Précision et incertitude des données économiques, Dunod, Paris, 1972 et Jacqueline FOURASTIE, Essai sur la mesure des quantités économiques, Mouton, Paris, La Haye, 1972.
- (35).- Le tableau des salaires figure dans Jean et Jacqueline Fourastié, Pouvoir d'achat, Prix et Salaires, col. "Idées", Gallimard, Paris, 1977, p. 66. Il est tenu à jour au Laboratoire d'Econométrie du Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris.
- (36).- Lorsque d'autres personnes que des manœuvres participent à la fabrication, leur temps est compté en "équivalent manœuvre"; ainsi un ingénieur travaillant 1 h à la conception ou à la surveillance de la 2 CV et payé deux fois plus que le manœuvre, verra son temps compté pour 2 h.
- (37).- Ce tableau, paru dans Jean et Jacqueline Fourastié, Pouvoir d'achat, Prix et Salaires et mis à jour au laboratoire d'Econométrie du CNAM, paraît dans les Tableaux de l'Economie Française de l'INSEE.
- (38).- D'après Système élargi de comptabilité nationale, Collection de l'INSEE, n° 44-45, mai 1976.
- (39).- Extrait de B. Brunhes, Présentation de la comptabilité nationale française, Collection de l'INSEE, n° 51, déc. 76, réédité chez Dunod, col. "Modules Economiques". Paris.
- (40).- Une tentative a été faite, à long terme, en France: Rémy ALASSEUR, Jacqueline FOURASTIE, Jean GUILHEM, sous la direction de Jean FOURASTIE: Documents pour l'élaboration d'indices du coût de la vie en France de 1910 à 1965, Mouton, Paris, la Haye, 1970.
- (41).- W.C. MITCHELL, "The making and using of index numbers", Bulletin du Bureau of Labor Statistics, n° 173, p. 25-26, cité par M. OLIVIER, Les nombres indices de la variation des prix.
- (42).- JULIN, Principes de Statistique théorique et appliquée, t. II, p. 114.
- (43).- H. GUITTON, Statistique et Econométrie, Dalloz, Paris, p. 48-49.
- (44).- F. DIVISIA, L'indice monétaire et la théorie de la monnaie, Sirey, 1926.
- (45).- JULIN, Principes de statistique théorique et appliquée, tome II, p. 172.
- (46).- DUGE DE BERNONVILLE, "Les indices du mouvement général des prix", Journal de la Société de Statistique de Paris, mai 1924, p. 182.

ANALISIS DE SERIES CRONOLOGICAS: LOS INDICES ESTADISTICOS

I. GENERALIDADES SOBRE LAS SERIES CRONOLOGICAS

Una serie estadística es una serie cronológica cuando permite seguir las variaciones de una misma realidad en el transcurso del tiempo (en griego, chronos).

Las figuras siguientes presentan un cierto número de series cronológicas extraídas de documentos estadísticos diversos. La figura 1, extracto de *Panorámica 1984* de la Comunidad Autónoma de Euskadi, da la evolución de la

población en el País Vasco y en España desde 1900 hasta 1981.

En las figuras 2 y 3, se encontrará un extracto de los indicadores de las actividades industriales (Indicators of Industrial Activity), 1984-III de la O.C.D.E. La figura 3 es un gráfico de los índices de la producción industrial en los diferentes países de la O.C.D.E. desde 1977 hasta 1984.

Zuzenbidezko biztanleriaren eboluzioa
Evolución de la población de derecho

URTEA ANO	EUSKAL HERRIKO K.A. C.A. DE EUSKADI	ESTATUA ESTADO
1900	602.204	18.617.956
1910	672.884	19.992.451
1920	783.125	21.508.135
1930	885.601	23.844.796
1940	948.096	26.187.899
1950	1.039.465	28.368.642
1960	1.358.707	30.903.137
1970	1.867.287	34.032.801
1975	2.072.100	36.026.319
1981	2.141.809	37.746.260

Fig. 1

TOTAL INDUSTRY

INDUSTRIE TOTALE

I.S.I.C. 2, 3, and 4

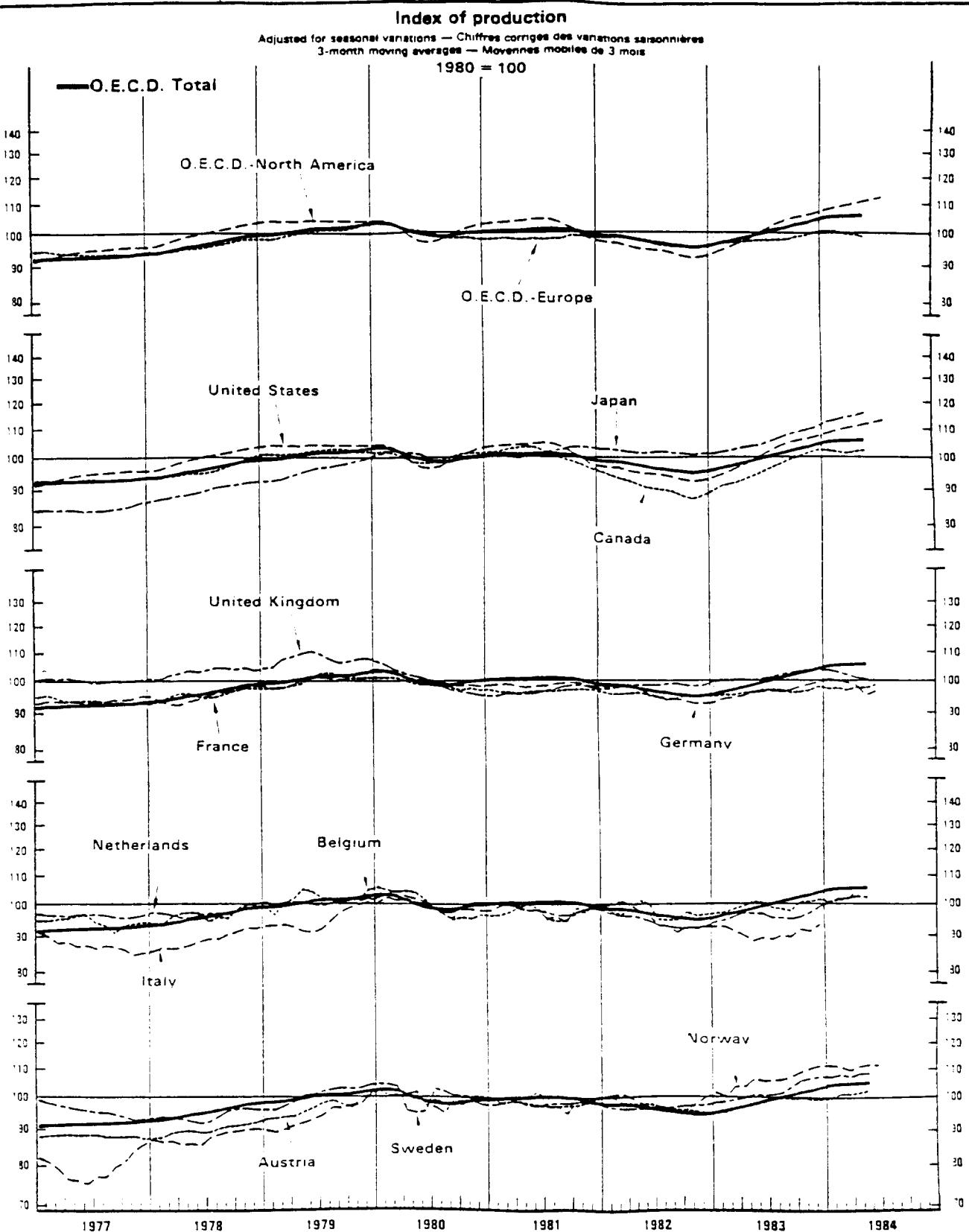


Fig 2

TOTAL INDUSTRY

INDUSTRIE TOTALE

I.S.I.C. 2, 3 and 4

	1981	1982	1983	1983		1984		1983						1984						12-month rate of change Variance per 12-mos	
				Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DEC	JAN	FEB	MAR	APR	MAY	JUN	
Production																					
Canada	100	90	95	96	92	101	104	105	85	91	102	102	105	95	99	105	107	104	103	109	8.4
United States	103	94	100	99	104	105	108	111	100	104	108	108	105	103	105	109	110	110	114	110	10.3
Japan	101	101	105	103	107	111	110	115	107	101	111	109	110	113	101	110	120	115	112	118	12.0
Australia (1)	102	97	92	92	95	96	91	95	94	96	98	101	89	72	101	100	102	99	104	118	10.6
Austria	98	98	99	102	94	105	99	106	94	88	101	104	106	105	94	100	102	103	108	109	5.6
Belgium	97	97	99	103	90	103	104	106	75	93	103	106	110	93	101	105	106	105	110	7.9	
Denmark (2)	100	103	106	109	102	111	113	116	70	114	121	110	116	108	104	110	124	106	121	121	-0.8
Finland	103	104	107	114	95	115	110	117	67	105	112	112	116	110	109	110	112	118	117	116	1.7
France (3)	99	97	98	101	84	105	105	105	85	62	97	97	105	105	103	105	106	100	101	101	7.5
Germany	99	96	96	97	90	103	100	96	85	83	103	101	106	101	94	105	102	99	100	90	92
Greece	99	95	94	96	93	97	94	97	88	88	104	98	98	96	95	95	95	95	98	98	8.6
Ireland (2)	101	102	109	112	103	112	114	132	112	91	112	111	116	115	102	117	125	127	129	141	1.9
Italy	98	95	93	97	80	97	98	97	97	42	100	100	103	89	94	98	102	98	102	7.0	21.2
Luxembourg	95	90	90	92	84	97	97	90	90	66	97	100	100	92	92	92	92	92	92	92	6.6
Netherlands	98	94	96	96	82	105	109	101	77	77	91	97	105	112	107	111	110	105	100	97	8.6
Norway	100	99	106	104	96	115	120	110	81	99	107	114	119	112	120	120	119	107	109	113	2.6
Portugal	101	105	107	109	97	109	109	109	107	79	107	110	109	107	107	107	112	107	107	107	-10.6
Spain	99	98	100	105	88	105	105	105	99	60	106	105	107	104	104	104	108	99	105	100	-5.2
Sweden (2)	98	97	103	111	84	115	108	119	42	100	109	117	117	112	107	108	109	119	119	119	8.2
Switzerland (1)	100	96	95	97	93	101	98	95	95	90	103	107	110	101	103	110	110	98	97	100	95
United Kingdom	96	98	101	98	96	106	108	95	95	90	103	107	110	101	103	110	110	98	97	100	95
E.E.C.	98	96	97	99	86	103	103	100	88	76	101	101	106	100	98	105	105	100	101	98	-0.9
O.E.C.D.-Europe	98	97	98	100	89	104	104	101	87	76	101	102	107	101	99	105	106	101	102	100	-0.2
North America	102	94	100	99	103	105	108	111	98	103	107	107	105	102	104	109	110	109	113	11.3	
O.E.C.D.-Total	100	96	100	100	97	105	106	107	94	90	105	105	107	103	101	107	109	106	106	108	0.1
Adjusted for seasonal variations — Chiffres corrigés des variations saisonnières																					
Canada	93	97	101	101	101	102	96	97	99	100	100	102	103	100	101	101	102	102	102	102	7.5
United States	98	103	106	109	111	111	102	103	105	105	106	106	108	109	109	110	111	112	113	10.6	
Japan	103	106	109	113	113	115	104	107	108	108	109	110	111	115	115	115	116	116	116	11.3	
Australia (1)	91	92	95	96	99	99	92	90	93	94	95	97	96	95	95	97	99	99	99	99	8.0
Austria	99	100	100	102	103	103	102	99	100	101	100	100	98	102	101	102	101	102	104	104	5.4
Belgium	101	98	101	101	100	100	99	95	98	106	96	100	106	97	102	101	102	113	113	113	7.7
Denmark (2)	107	103	108	112	99	109	108	100	111	111	112	113	114	109	114	115	115	115	115	115	5.3
Finland	108	108	109	109	110	110	107	108	109	109	110	108	110	109	110	110	110	110	110	111	0.5
France (3)	98	98	99	100	97	104	104	101	87	76	101	102	107	101	99	105	105	100	101	98	1.3
Germany	96	96	99	100	95	95	95	96	95	97	99	99	99	95	95	97	99	98	99	99	0.5
Greece	93	96	95	96	97	97	92	96	95	96	96	94	96	98	95	95	95	97	97	97	1.9
Ireland (2)	105	109	113	116	124	124	112	104	109	108	110	123	112	115	123	122	121	121	121	121	21.1
Italy	98	90	91	91	88	91	59	95	85	89	91	95	96	98	95	95	97	99	99	101	2.1
Luxembourg	96	93	97	92	91	97	97	96	92	91	97	97	96	97	97	97	97	97	97	97	7.6
Netherlands	97	95	97	102	102	102	96	95	95	97	94	94	97	94	101	101	101	101	101	101	101
Norway	107	107	111	111	112	112	107	105	107	111	110	111	114	110	110	110	114	111	109	109	1.5
Portugal	106	109	105	104	110	108	108	106	105	105	104	107	107	101	101	102	102	102	102	102	-10.9
Spain	101	100	100	102	98	101	101	98	98	100	103	103	103	100	99	99	100	98	98	98	-1.4
Sweden (2)	101	102	107	103	109	109	100	102	104	107	104	106	104	107	109	109	106	111	111	109	0.7
Switzerland (1)	96	95	94	104	100	100	102	102	103	103	104	103	104	103	103	102	101	103	100	99	-2.2
United Kingdom	100	102	103	103	100	100	102	102	103	103	104	103	104	103	103	102	101	103	100	99	-2.2
E.E.C.	96	97	94	100	98	97	96	97	96	97	96	97	96	97	96	97	97	97	97	97	-1.6
O.E.C.D.-Europe	97	98	101	99	97	97	98	97	97	100	99	101	101	98	98	100	100	98	98	98	-0.3
North America	98	103	—	108	110	101	103	104	105	105	105	107	107	108	107	109	109	110	111	112	10.3
O.E.C.D.-Total	98	101	101	103	103	103	100	100	101	102	102	103	103	103	103	102	104	105	106	105	0.3

1. Excluding 2. 2. Excluding 4. 3. Annual and quarterly data have more complete coverage than monthly data.

1. Non compris le 2. 2. Non compris le 4. 3. Les données annuelles ou trimestrielles ont une couverture plus étendue que les données mensuelles.

Vamos a tener la ocasión en las páginas siguientes de definir muchos de los conceptos que aparecen en ellas: índices, base del índice, corrección de las variaciones estacionales, medias móviles, gráfico semi-logarítmico.

En la figura 3, la tabla comprende los mismos índices, pero detallados mes a mes, a lo largo de 12 meses.

Nuestro estudio de las series cronológicas comprenderá tres partes:

- Representación gráfica de series cronológicas.
- Tratamiento estadístico de las series de carácter estacional.
- Previsiones a corto plazo.

1.1. REPRESENTACION GRAFICA DE SERIES CRONOLOGICAS

Como veremos a continuación, la representación gráfica de las series cronológicas permite hacer de estas series un primer análisis. Lo más frecuente, es utilizar gráficos cartesianos:

- El eje de abscisas, se reserva siempre al tiempo.
- El eje de ordenadas corresponde a los valores de las observaciones.

Se distinguen dos categorías importantes de gráficos cartesianos: El gráfico aritmético y el gráfico semi-logarítmico.

A. GRAFICO ARITMETICO

a) Definición

En un gráfico aritmético, las escalas utilizadas en cada uno de los dos ejes, son tales que a cada valor corresponde un segmento de recta cuya longitud les es proporcional: así, sobre el eje de abscisas, duraciones iguales se representan mediante segmentos iguales (en particular hay que tener en cuenta cuando las observaciones no se hacen a intervalos de tiempo regulares).

No hay regla particular que observar en lo que se refiere a la elección entre las longitudes de los segmentos atribuidos a las unidades sobre cada uno de los ejes. Sin embargo, hay que tener en cuenta para la elección de las unidades y de los orígenes la importancia de la duración del periodo de observación y una prolongación ulterior eventual de esta duración, así como los valores extremos de la variable que se observa en el tiempo (por ejemplo, si las observaciones varían entre 150 y 200, se establecen graduaciones de 150 a 200 en todo el intervalo disponible del eje vertical).

b) Ejemplo de representación gráfica sobre papel aritmético

A continuación se dan los números de matrimonios en miles celebrados en Francia de enero de 1978 a junio de 1981.

Fuente: Bulletin mensuel de statistique de l'INSEE.

TABLA 1

Número de matrimonios en Francia (miles)

Año	Enero	Febrero	Marzo	Abre	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
1978	14,2	16,1	19,0	40,5	20,3	43,6	52,6	31,8	46,7	24,1	15,0	28,9
1979	12,1	14,2	21,2	32,8	20,1	51,9	39,5	32,4	44,8	25,5	15,5	28,4
P 1980	10,5	13,9	21,3	30,0	26,1	44,0	40,6	39,4	40,4	25,7	16,9	24,9
P 1981	11,2	13,0	16,6	26,7	23,9	39,7						

(P: Cifras provisionales. Se trata de las últimas cifras publicadas en diciembre de 1981)

Esta serie se representa, sobre papel aritmético, en el gráfico de la figura 4:

- El número de matrimonios (en millares) se lleva sobre

el eje vertical y se han tomado 10 mil matrimonios como origen.

- Los meses de enero de 1978 a junio de 1981 se llevan sobre el eje horizontal.

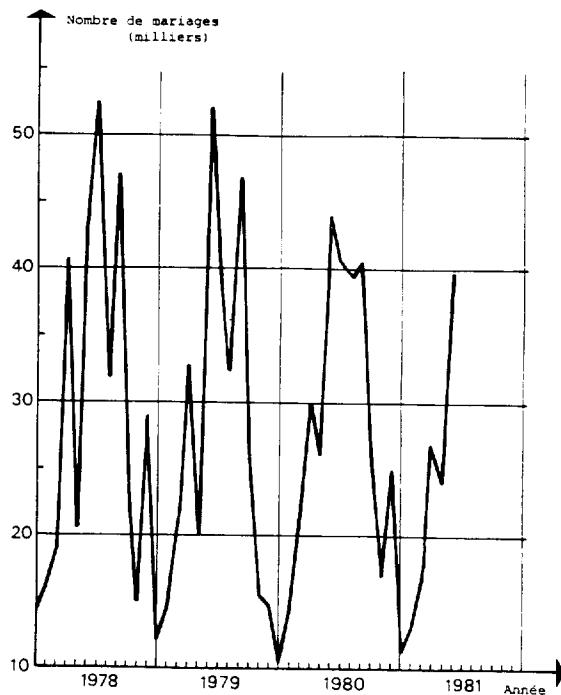


Fig. 4

B. GRAFICO SEMI-LOGARITMICO

En un gráfico semi-logarítmico se tiene en cuenta:

- Una escala aritmética en el eje de abscisas (eje del tiempo).
- Una escala logarítmica sobre el eje de ordenadas.

Una escala logarítmica es tal, que con relación a esta escala un número se representa mediante un segmento de recta cuya longitud es proporcional al logaritmo decimal del número.

Si volvemos a la figura 2, podemos ver que la escala de tiempos es una escala aritmética, donde aparecen los años, los trimestres y los meses. Sobre el eje de ordenadas, se puede constatar que la distancia comprendida entre 80 y 90 es mayor que la distancia entre 130 y 140 ... se puede verificar que las escalas son logarítmicas. Los gráficos de la figura 2 son pues semi-logarítmicos.

La escala logarítmica permite un trazado más fácil y más fácilmente legible de las series cronológicas:

- Cuando la variable estudiada varía de manera muy sensible, con ciertos datos del periodo retenido.

- Cuando se desean representar sobre un mismo gráfico variaciones cuyos valores por término medio son notoriamente diferentes.

Estas propiedades se producen por el hecho, de que cuando un número crece el logaritmo decimal crece mucho menos rápidamente que este número. El trazado de la curva $Y = \lg X$ lo muestra claramente. (Fig. 5).

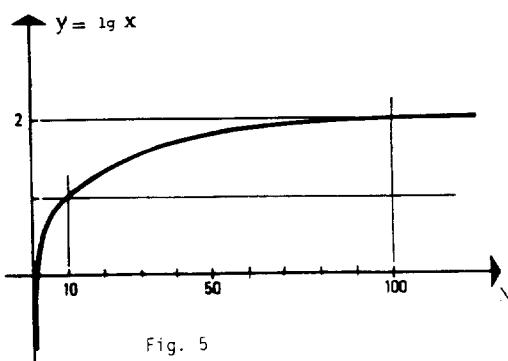


Fig. 5

a) Escala Logarítmica

La escala logarítmica como su nombre indica, está graduada en logaritmos. El eje representado, figura 5, se destina a mostrar el proceso de construcción. La parte recta está graduada por una escala aritmética: -1, 0, 1, 2. Sobre esta escala han sido llevados los logaritmos de algunos números característicos. Por ejemplo, entre 0 y 1, se ha colocado:

$$\begin{array}{ll} \lg 2 = 0,301 & \lg 6 = 0,778 \\ \lg 3 = 0,477 & \lg 7 = 0,845 \\ \lg 4 = 0,602 & \lg 8 = 0,903 \\ \lg 5 = 0,699 & \lg 9 = 0,954 \end{array}$$

Sobre la escala de la izquierda, que es la escala logarítmica, se han escrito estos números: 2, 3, 4, ... Así, la distancia entre 1 y 2 es proporcional a 0,301, la distancia entre 1 y 3 proporcional a 0,447, ...

Se obtiene así, figura 6, una escala sobre la cual las distancias son proporcionales a los logaritmos. Sobre un papel funcional, solamente se representa esta escala.

Hagamos notar la existencia de *módulos* de la escala logarítmica: entre 0,1 y 1, entre 1 y 10, entre 10 y 100, se encuentra la misma distancia, y las mismas graduaciones interiores. Existen papeles logarítmicos con uno o varios módulos. Se escoge el número de módulos según los órdenes de magnitud de los datos que se quieren representar (de 0,01 a 0,1: un módulo; de 100 a 10.000: dos módulos ...).

b) Notas

- Si los valores de una variable varian entre 100.000 y 100 millones, la representación sobre papel semi-loga-

rítmico necesita un papel de 3 módulos solamente, pero hace falta, en general, modificar las graduaciones: en efecto, en la mayoría de los casos, el primer módulo supone los valores 1 a 10, el siguiente se refiere a los valores 10 a 100, etc...; basta pues multiplicar las graduaciones por 100.000.

- En algunos papeles semi-logarítmicos, las graduaciones son más finas, sobre el eje vertical, para los valores comprendidos entre 1 y 5 que para los valores comprendidos entre 5 y 10 por el hecho de que la distancia comprendida entre 1 y 5 es proporcional a $\lg 5 = 0,699$ y que la comprendida entre 5 y 10 es proporcional a $\lg 10 - \lg 5 = 0,301$ (por lo tanto aproximadamente dos veces menos). Hay que tener muy en cuenta este hecho en el momento de la representación gráfica.

c) Ejemplo de representación gráfica sobre papel semi-logarítmico

Producto Interior Bruto, en valores de adquisición, a los precios corrientes, por habitante, para Francia, Estados Unidos, Japón y Portugal, Años 1971 y 1974 a 1978.

TABLA 2
P.I.B. (Unidad: dólar de los Estados Unidos de América)

	1971	1974	1975	1976	1977	1978
Francia	3 089	5 066	6 423	6 615	7 190	8 851
U.S.A.	5 124	6 640	7 150	7 883	8 711	9 664
Japon	2 203	4 214	4 500	5 007	6 094	8 475
Portugal	783	1 464	1 562	1 586	1 663	1 812

(Fuente, INSEE, Annuaire statistique de la France, 1981)

Las cuatro series cronológicas están representadas sobre un papel semi-logarítmico de dos módulos en el gráfico de la figura 7.

d) Propiedades de la escala logarítmica

Se desprenden de las propiedades del logaritmo decimal de un número:

A partir de una representación gráfica sobre papel semi-logarítmico, se puede determinar, por simple lectura, la relación de dos observaciones (cuyos valores son

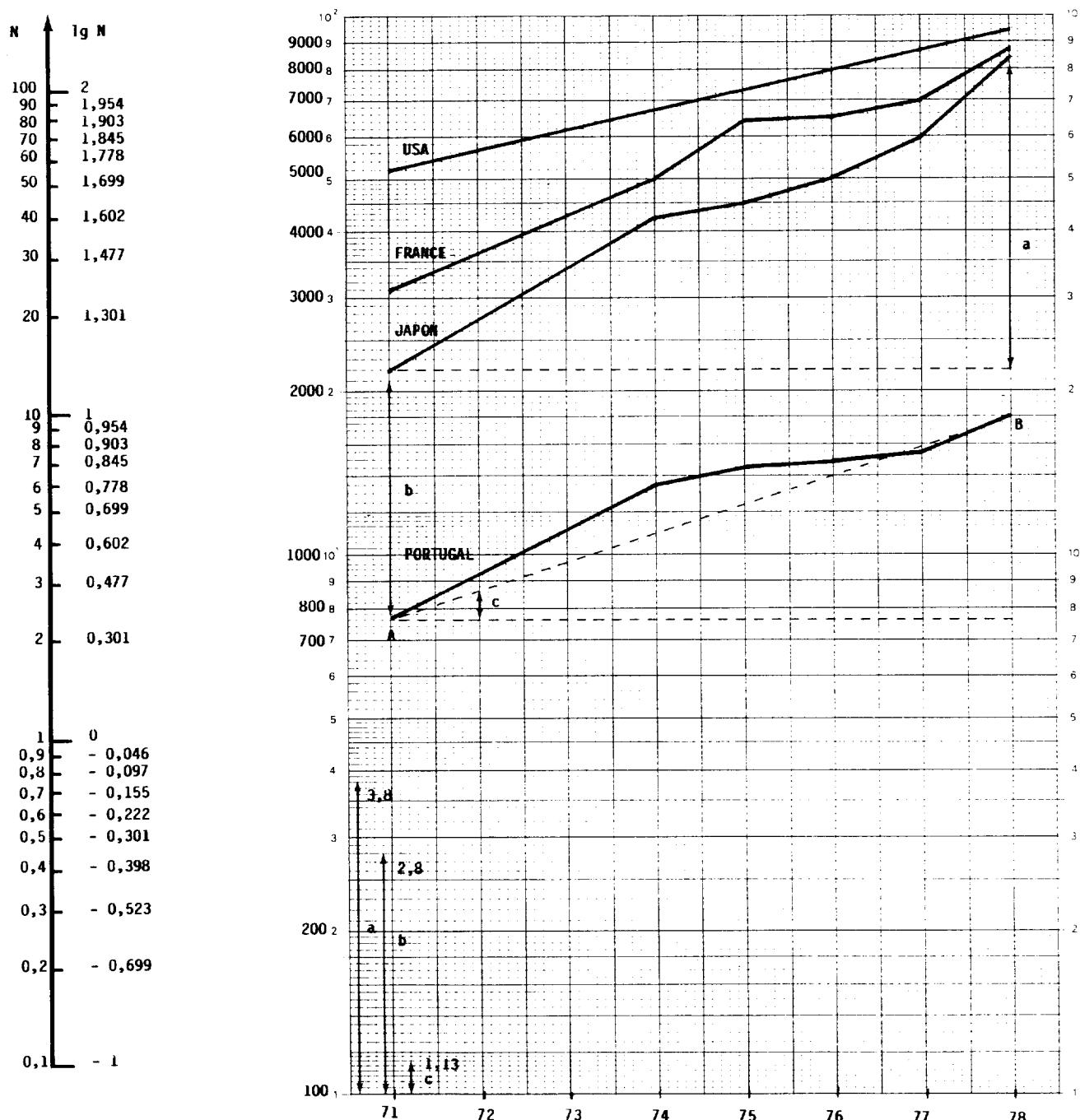


Fig. 6

P.I.B., FRANCIA, ESTADOS UNIDOS, JAPON, PORTUGAL
(en valores de adquisición, a los precios corrientes, por habitante)
AÑOS 1971 y 1974 a 1978

Fig. 7

A y B). Esta relación tiene un logaritmo igual a la diferencia de las dos ordenadas, ya que:

$$\lg B - \lg A = \lg (B/A)$$

Basta llevar, sobre el eje vertical, partiendo del origen de un módulo cualquiera, la diferencia de las ordenadas de las dos observaciones A y B y leer la relación; en efecto, se ha llevado una longitud igual a $\lg B - \lg A$, por lo tanto se lee, sobre la escala el valor de B/A .

Aplicación numérica

Con ayuda del gráfico se puede, por simple lectura, leer la relación entre los valores PIB por habitante en el Japón para 1971 y 1978 (longitud a): 3,8 ó la relación entre los PIB, en 1971 del Japón y de Portugal (longitud b): 2,8.

La evolución de una magnitud que crece con un porcentaje constante en el tiempo se representa mediante una recta sobre papel semi-logarítmico.

En efecto, si se tiene, por ejemplo, una serie anual y si la variable observada (señalada con x) tiene por valor A el año 0 y su tasa de crecimiento anual es igual a r, se tiene, año a año, los valores siguientes para x:

Año 0	A
Año 1	$A(1+r)$
.	.
.	.
Año t	$A(1+r)^t$

Sobre una escala logarítmica se llevan los valores siguientes:

Año 0	$\lg A$
Año 1	$\lg [A(1+r)] = \lg(1+r) + \lg A$
.	.
.	.
Año t	$\lg [A(1+r)^t] = t \lg(1+r) + \lg A$

Se constata pues que si se llevan, sobre el papel semi-logarítmico, valores que crecen en logaritmo de $(1+r)$, es decir con una cantidad constante, de un año con relación al precedente; uniendo estos puntos, se obtiene una recta.

Se desprende de lo que precede que se pueden calcular,

a partir de una representación sobre papel semi-logarítmico, tasas medias de crecimiento. Basta trazar una recta entre los dos puntos correspondientes a las extremidades del periodo estudiado; esta recta representa lo que hubiera sido la evolución si hubiese sido regular, con una tasa de crecimiento constante. Se puede leer la relación:

. Entre dos observaciones espaciadas en un año, si se desea tener la tasa de crecimiento anual media,

. Entre dos observaciones espaciadas en un mes, si se desea tener la tasa de crecimiento mensual media,

. Entre la primera y la última observación si se desea la relación global.

La lectura se hace tomando la diferencia entre las ordenadas en el gráfico y llevándola sobre el eje vertical a partir del origen de un módulo.

Aplicación numérica

Si se lleva al gráfico, se pueden obtener por lectura gráfica, las tasas medias de crecimiento anual en el periodo 1971-1978 para los PIB, por habitante en Portugal, en Japón, en Francia, y en los Estados Unidos. Para obtener cada una de estas tasas, se unen mediante una recta los puntos de cada serie cronológica correspondiente a los años 1971 y 1978 (recta AB para Portugal) y se llevan a partir del origen de un módulo, las longitudes correspondientes a las diferencias entre las ordenadas de dos puntos de la recta cuyas abscisas están espaciadas en un año (longitud c para Portugal).

Se obtienen las tasas anuales medias de crecimiento siguientes:

- . Para Francia : 16%
- . Para los Estados Unidos: 9%
- . Para Japón : 21%
- . Para Portugal : 13%

Así, para Portugal, el crecimiento total es:

$B/A \approx 2,3$ es decir un aumento del 130%

El gráfico permite leer el crecimiento medio anual:

$\sqrt[7]{2,3} = 1,13$ es decir un aumento del 13%

1.2. TRATAMIENTO ESTADISTICO DE LAS SERIES CON CARACTER ESTACIONAL

A. DEFINITION

Muchas series cronológicas, se conocen, por mes, semana e incluso por día. Los índices más usuales se calculan cada mes, véase cada semana. Se plantea un problema, el del papel de la estación o el periodo del año. Por ejemplo, el índice bruto de la producción industrial de automóviles ha pasado de 188 en junio de 1983 a 139 en julio de 1983 y a 62 en agosto de 1983.

¿Se debe deducir que ha habido un fallo de la industria del automóvil francesa (baja de más del 60% en dos meses)? No, es fácil señalar que el mes de junio es un mes de una producción bastante grande (antes de la salida de vacaciones) y que por el contrario los meses de julio y agosto son meses en los que la producción, es más baja, sobre todo en agosto, a consecuencia de los salarios pagados a los obreros y empleados de la industria del automóvil. Se puede entonces constatar que una baja semejante se encuentra el año siguiente: en 1982:

164 en junio
139 en julio
41 en agosto

Fuente: INSEE, Annuaire Statistique de la FRANCE

El problema es pues distinguir lo que, en estos valores, es imputable a una variación importante de la coyuntura, y lo que es debido a la estación. Esta distinción en gran medida es arbitraria. Se hace una hipótesis sobre las variaciones: La variación ... de un mes sobre el mes precedente es la resultante de dos grupos de causas. La primera reúne todas las causas que están ligadas a la estación y la segunda todas las demás (1).

El primer grupo de causas engendra el movimiento estacional, el segundo el movimiento de larga duración o tendencia, movimiento desestacionalizado. Existe bastante a menudo también un movimiento coyuntural, que se une a los dos precedentes. La manera de determinar este movimiento de larga duración no es único: de ello resulta que los coeficientes estacionales que determinan el movimiento estacional no son tampoco determinados de manera única.

También un gran número de series cronológicas mensuales están afectadas de variaciones estacionales.

Se entiende por variaciones estacionales alternancias impuestas por el ritmo de las estaciones. Así la influencia de la estación se manifiesta sobre variables tales como el precio de los frutos frescos, precio de las legumbres, las facturas de la industria hotelera, la producción mensual de ciertos bienes tales como los coches particulares (caída sistemática del mes de agosto), las ventas diarias en un gran almacén ...

Por definición, las variaciones estacionales se reproducen cada año con la misma amplitud para meses homólogos y cada semana para días homólogos: el movimiento estacional es periódico.

Así, el análisis de las series cronológicas mensuales para tal variable puede hacer aparecer variaciones en el tiempo, algunas de las cuales resultan de factores puramente estacionales. Para hacerse una idea correcta de la evolución propiamente coyuntural de la variable estudiada es importante separar el movimiento estacional del movimiento extraestacional. Por este motivo se habla de descomposición de series cronológicas. Para conocer el movimiento extraestacional, se realiza una serie cronológica desestacionalizada; su obtención se hace por desestacionalización de la serie cronológica bruta.

Nota importante

La observación de los valores tomados por el movimiento extraestacional en un periodo bastante largo (varios años) permite descubrir tres componentes en este movimiento:

- El trend (tendencia) o movimiento de larga duración que traduce las variaciones debidas a modificaciones estructurales de naturaleza económica, sociológica, política, ...

- El movimiento cíclico que se traduce por oscilaciones a una parte y otra del movimiento de larga duración correspondiente a la evolución de la coyuntura económica.

- Las variaciones accidentales, debidas a acontecimientos exteriores (huelgas, crisis, ...) que no dependen de los otros dos tipos de movimientos.

La descomposición del movimiento extra-estacional en trend y movimiento cíclico no es necesaria más que para los problemas de previsión a medio o largo plazo. Esta no será pues tratada aquí, pues nos limitaremos al problema de la desestacionalización y a su aplicación a la

previsión a corto plazo.

B. UN PROCEDIMIENTO INSUFICIENTE

Volviendo al ejemplo citado de la producción de automóviles en Francia, tendríamos tentación de pensar que basta comparar el dato de agosto de 1983 con el del mes de agosto de 1982 para eliminar las variaciones estacionales. En efecto:

- Si la magnitud considerada tiene una variación neta entre estas dos fechas (por ejemplo crecimiento y luego decrecimiento), es posible que la relación de los dos valores en el mes de agosto sea superior a uno, mientras se está en periodo de decrecimiento (ver figura 8).

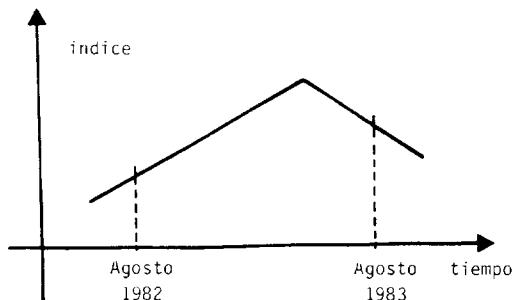


Fig. 8

- El procedimiento depende tanto de la variación del año precedente como de la del año actual: con el mismo ejemplo, se ve si la relación es superior a 1, es únicamente porque el año precedente era un año de crecimiento. No se puede deducir nada sobre la tendencia coyuntural del año actual.

C. METODO DE LAS MEDIAS MÓVILES

Para determinar el movimiento general de la serie, hay que estimar sobre los datos pasados los resultados corregidos de las variaciones estacionales que constituyen el movimiento de larga duración, o tendencia.

Esta estimación se puede hacer en primera aproximación con ayuda de un gráfico: sobre el gráfico que representa los datos brutos, se traza a ojo una curva tan regular como sea posible que represente la tendencia. Este procedimiento tiene la ventaja de ser simple y de permitir tratar los movimientos más diversos. Sin embargo, es bastante arbitrario y se prefiere en general el método de las medias móviles que va a ser presentado aquí.

a) Principio del método

El método de las medias móviles se basa en el principio siguiente: Las variaciones estacionales desaparecen prácticamente cuando se reemplazan los valores observados de la serie por medias calculadas en un período suficientemente largo (3 meses, 4 meses, 5 meses, ... ó 12 meses), el período debe ser escogido en función de la periodicidad de los resultados: si se trata de variaciones estacionales en un año, el período es 12 meses, cuatro trimestres o 3 cuatrimestres ...

Las medias se calculan de la manera siguiente: (a título de ejemplo se da aquí a continuación el modo de cálculo para 3 meses, 4 meses y 12 meses):

Notas importantes

1.- Para calcular medias móviles en períodos que tengan un número de meses par, se hace intervenir, en el cálculo, un mes más, a fin de poder afectar las medias móviles a meses determinados.

Así, la media M_1 que viene a continuación debería estar colocada entre x_2 y x_3 si los índices designan los meses del año, estando afectado cada valor x_2 al menos al 15 de cada mes, M_1 corresponde al primero de marzo (entre los centros de los meses 2 y 3) mientras que M_2 corresponde al 15 de marzo, fecha para la cual se conoce la observación x_3 :

x_1

x_2

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = M_1$$

$$x_3 \leftarrow \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \right) / 4 = M_2$$

x_4

2.- En la práctica nos contentamos con calcular medias móviles cada 3 ó 4 meses, si las oscilaciones estacionales son bastante débiles; por el contrario, si se está en presencia de una serie cronológica con variaciones estacionales importantes de un mes a otro se calculan medias móviles en 12 meses.

3.- En un cierto número de casos, los valores tomados por una variable económica de un mes dado dependen de

dependen de la importancia de la actividad económica durante este mes; ésta es función del número de días laborables. Conviene entonces proceder, antes de la desestacionalización, a una corrección del número de días laborables: El método consiste, por regla general, en calcular, para cada año, el número mensual medio de días laborables y en corregir a continuación cada valor

mensual con ayuda de una regla de tres:

$$\text{Valor corregido} = \frac{\text{Valor bruto}}{\text{número mensual medio}} \times \frac{\text{Número de días laborables en el año}}{\text{Número de días laborables del mes } X}$$

MEDIAS MÓVILES

Mes	Observaciones	medias móviles en		
		3 meses	4 meses	12 meses
1	x_1			
2	x_2	$(x_1 + x_2 + x_3) / 3$		
3	x_3	$(x_2 + x_3 + x_4) / 3$	$\left(\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_5}{2}\right) / 4$	
4	x_4	$(x_3 + x_4 + x_5) / 3$	$\left(\frac{x_2}{2} + x_3 + x_4 + x_5 + \frac{x_6}{2}\right) / 4$	
5	x_5	.	.	
6	x_6	.	.	
7	x_7	.	.	$\left(\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \dots + x_{12} + \frac{x_{13}}{2}\right) / 12$
8	x_8	.	.	$\left(\frac{x_2}{2} + x_3 + x_4 + \dots + x_{13} + \frac{x_{14}}{2}\right) / 12$

Fig. 9

Número de matrimonios celebrados en Francia (miles)
Cálculo de las relaciones estacionales y de la tendencia

AÑO	E.	F.	M.	A.	M.	J.	J.	A.	S.	O.	N.	D.
1978 (1)	14,2	16,1	19,0	40,5	20,3	43,6	52,6	31,8	46,7	24,1	15,0	28,9
(2)							29,3	29,1	29,2	28,9	28,6	28,9
(3)							1,80	1,09	1,60	0,83	0,52	1,00
1979 (1)	12,1	14,2	21,2	32,8	20,1	51,9	39,5	32,4	44,8	25,5	15,5	28,4
(2)	28,7	28,2	28,2	28,1	28,2	28,2	28,1	28,1	28,0	27,9	28,1	28,0
(3)	0,42	0,50	0,75	1,17	0,71	1,84	1,41	1,15	1,60	0,91	0,55	1,01
1980 (1)	10,5	13,9	21,3	30,0	26,1	44,0	40,6	39,4	40,4	25,7	16,9	24,9
(2)	27,7	28,0	28,2	28,0	28,0	28,0	27,8	27,8	27,6	27,3	27,0	26,8
(3)	0,40	0,50	0,76	1,07	0,93	1,57	1,46	1,42	1,46	0,94	0,63	0,93
1981 (1)	11,2	13,0	16,6	26,7	23,9	39,7						
(2)												
(3)												

Fig. 10

- (1) Datos brutos
- (2) Media móvil en 12 meses
- (3) Relaciones estacionales

b) Ejemplo numérico: Número de matrimonios celebrados en Francia de 1978 a 1981

La figura 10 vuelve a considerar el número de matrimonios celebrados en Francia, que ha sido utilizado en el gráfico de la figura 4.

La serie así presentada es demasiado corta para que se puedan extraer conclusiones. Pero un estudio de esta serie en un periodo más largo ha permitido descubrir variaciones estacionales. El gráfico de la figura 4 muestra igualmente que la hipótesis de la existencia de un movimiento estacional, incluso en esta serie corta, es completamente realista.

La figura 10 indica para cada año:

- En la primera línea, el número de matrimonios, en miles.

- En la segunda línea, la media móvil en 12 meses.

- En la tercera línea, las relaciones estacionales (de las cuales hablaremos en el párrafo siguiente).

Así, para el mes de julio de 1978, se ha calculado la suma en 12 meses, siendo la mitad del número de matrimonios de enero de 1978 y la mitad de los de enero de 1979:

$$\frac{14,2 + 16,1 + 19,0 + \dots + 28,9 + \frac{12,1}{2}}{2} = 351,75$$

de donde la media (tendencia calculada por el método de las medias móviles):

$$\frac{351,75}{12} = 29,31$$

Esta media está centrada en julio de 1978: representa

pues el valor de la tendencia calculada por el método de las medias móviles, para esta fecha. Se calculan también las otras medias que figuran en la línea (2) de la tabla.

c) Generalización del método de las medias móviles

El método de las medias móviles es un método de *alisamiento*, es decir que atenúa las variaciones de una serie cronológica. Como tal, puede ser empleada para alisar una serie, bien que ésta represente o no variaciones estacionales. De esta manera se pueden reencontrar medias móviles en tres meses. Existen igualmente medias móviles ponderadas, en las cuales se da, en general un peso más importante a las observaciones centrales y menos importante a las observaciones más alejadas del centro.

D. LOS COEFICIENTES ESTACIONALES

Para caracterizar cada mes, se utilizan los *coeficientes estacionales* que son en general determinados con ayuda de los datos pasados y sirven a continuación para las previsiones. En efecto, es más fácil prever la tendencia y a continuación utilizar los coeficientes estacionales para restablecer el carácter estacional de la serie.

Los coeficientes estacionales pueden ser *aditivos* o, más a menudo, *multiplicativos*. Nosotros no tratamos aquí más que de los coeficientes estacionales multiplicativos.

a) Definición

Los coeficientes estacionales se calculan a partir de las *relaciones estacionales*. Se llama relación estacional para un mes X a la relación:

$$\frac{\text{Valor de la variable de un mes } X}{\text{Media móvil relativa del mes } X} = \frac{\text{Valor observado}}{\text{Tendencia}}$$

En principio, las relaciones estacionales no deberían variar de un año a otro. En la práctica, para un mes dado, las relaciones estacionales varian ligeramente de un año a otro, a causa de las variaciones accidentales. Si estas variaciones son demasiado importantes, esto puede ser, sea porque no se ha tomado un periodo suficientemente largo para el estudio, sea porque la serie cronológica considerada no está afectada de variaciones estacionales suficientemente significativas, sea incluso por otras razones, algunas de las cuales aparecerán en

el ejemplo.

Si, por el contrario, las variaciones entre las relaciones estacionales son débiles, se deduce de ello un *coeficiente estacional*, medio, mediana o valor más probable de las relaciones estacionales para cada mes.

b) Ejemplo de cálculo

Volviendo al ejemplo de la figura 10, la tendencia en julio de 1978 había sido medida por 29,31 miles de matrimonios. La relación estacional es pues para este mes de julio de 1978:

$$\frac{\text{Valor observado}}{\text{Tendencia}} = \frac{52,6}{29,3} = 1,80$$

Se calculan de la misma manera todas las relaciones estacionales que figuran en la línea (3) de la misma tabla.

Se puede deducir de esta tabla coeficientes estacionales para los meses en los que las relaciones estacionales no son demasiado diferentes. Escogeremos en principio la media de las relaciones estacionales:

Enero	$\frac{0,42 + 0,40}{2} = 0,41$
Febrero	0,50
Marzo	0,75
Abril	$\frac{1,17 + 1,07}{2} = 1,12$
Mayo	Las relaciones son demasiado diferentes
Junio	Las relaciones son demasiado diferentes
Julio	$\frac{1,80 + 1,41 + 1,46}{3} = 1,56$
Agosto	$\frac{1,09 + 1,15 + 1,42}{3} = 1,22$
Septiembre	$\frac{1,60 + 1,60 + 1,46}{3} = 1,55$
Octubre	$\frac{0,83 + 0,91 + 0,94}{3} = 0,89$
Noviembre	$\frac{0,52 + 0,55 + 0,63}{3} = 0,57$
Diciembre	$\frac{1,00 + 1,01 + 0,93}{3} = 0,98$

Las relaciones son diferentes,
hay nula

El carácter estacional de la serie es indudable. Sin embargo, hemos evitado calcular algunos coeficientes es-

tacionales; se ve que el método no se puede aplicar indiscriminadamente; su fracaso relativo aquí proviene de dos causas:

- Por una parte, como se ha dicho ya anteriormente, la serie es demasiado corta, no se conocen más que dos o tres relaciones estacionales.

- Por otra parte, el mes no parece muy característico de la estacionalidad de la serie. Se puede constatar sobre todo que el número de matrimonios de los meses de mayo y junio reunidos permitiría un mejor estudio:

Mayo y junio de 1979:

Valor observado	:	70,0
Tendencia	:	56,4
Relación estacional	:	1,24

Mayo y junio de 1980:

Valor observado	:	70,1
Tendencia	:	56
Relación estacional	:	1,25

Esta vez, se encuentran dos relaciones estacionales muy próximas y es posible deducir de ello un coeficiente estacional. Es probable que el simple reparto de los sábados incite a las personas a casarse en mayo más que en junio o viceversa y que, por consiguiente, el estudio se debe hacer reuniendo estos dos meses.

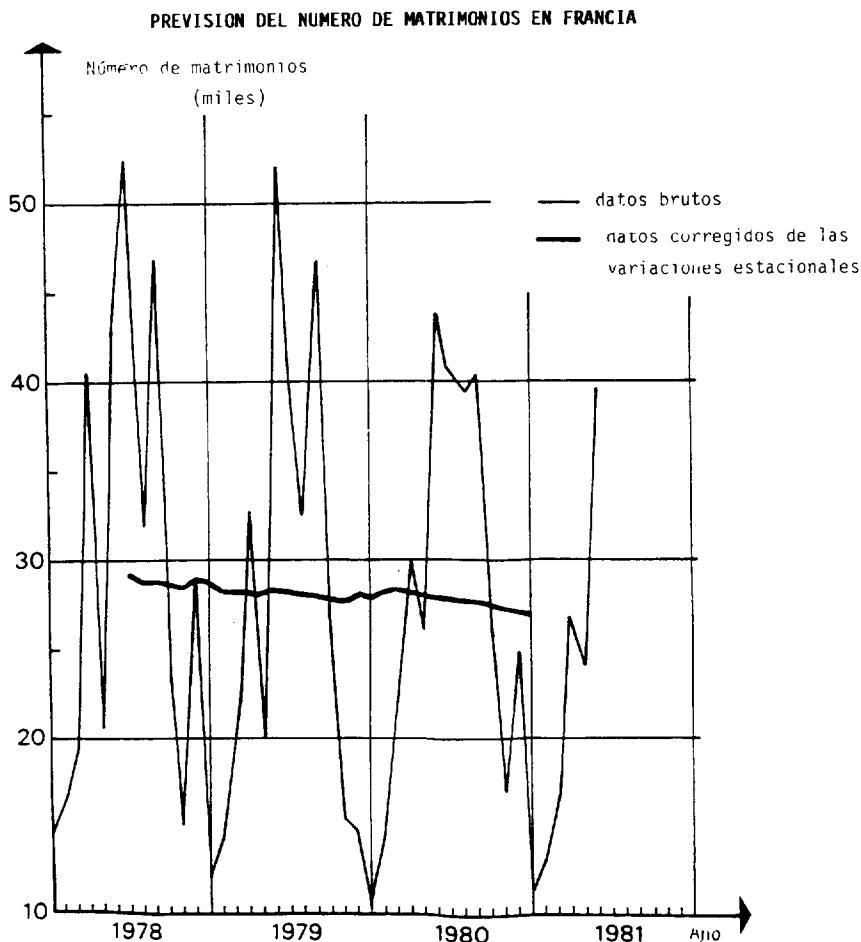


Fig. 11

El estudio hecho sobre esta serie de números de matrimonios permite pues concluir el carácter estacional de la serie, al mismo tiempo que su tendencia general al alza. La representación gráfica del movimiento estacional y de la tendencia se estudia en la figura 11.

1.3. PREVISIONES A CORTO PLAZO

A. PRINCIPIO

A partir de una serie cronológica dada para el pasado, se desea prever el futuro inmediato. Dos grandes categorías de métodos son posibles:

- Una *extrapolación* de la serie dada. Se utilizan únicamente los números de esta serie y los otros correspondientes. Se supone que el entorno no cambia y que la evolución de la serie será la misma. Desarrollamos en este párrafo algunos de los métodos de extrapolación.

- Una *previsión con ayuda de variables explicativas*. Se trata de determinar los factores (al menos los factores cuantitativos, los únicos que somos capaces de hacer intervenir en un cálculo) que representan causas del fenómeno a prever. Los métodos utilizados son en general la estimación del pasado por una regresión (simple o múltiple) y la prolongación de la tendencia así obtenida. Para no alargar desmesuradamente este curso, no los desarrollaremos aquí.

B. CORRECCION DE LAS VARIACIONES ESTACIONALES Y EXTRAPOLACION DE LA TENDENCIA

Teniendo en cuenta las definiciones y los métodos dados anteriormente se puede resumir el proceso de la siguiente manera.

a) Detectar si la serie cronológica presenta variaciones estacionales

Se trata de verificar que la serie presenta oscilaciones que se reproducen en meses determinados con amplitudes que son esencialmente función del mes considerado.

Para verificar que hay efectivamente un movimiento estacional se puede proceder a una representación gráfica que superponga los diferentes años de observación de los que se dispone: Si se obtienen curvas aproximadamente paralelas, se concluye la existencia de un movimiento estacional: (Figura 12).

b) Desestacionalizar la serie cronológica

Se escoge, según la importancia resumida de las variaciones estacionales, un periodo para el cálculo de las medias móviles y se aplica el método descrito anteriormente:

- Cálculo de las medias móviles y representación gráfica de su evolución (movimiento extra-estacional)

- Cálculo de las relaciones estacionales. Se elige entonces como *coeficiente estacional* para cada mes, sea la media, sea la mediana, sea otro valor probable de las relaciones estacionales.

VALOR DE LA VARIABLE

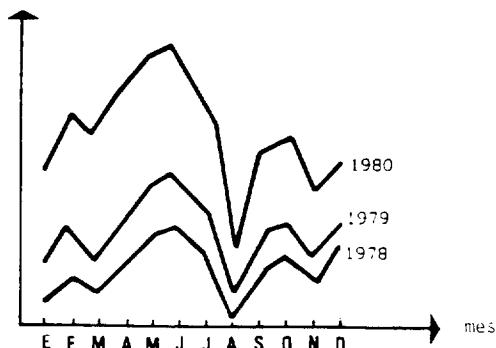


Fig. 12

c) Extrapolar el movimiento extra-estacional

La representación gráfica del movimiento extra-estacional presenta oscilaciones de un mes a otro netamente menos importantes que las de la serie bruta. Se puede hacer un ajuste sobre la serie desestacionalizada mientras que esto no es posible sobre la serie bruta. Se puede hacer bien una extrapolación *a ojo*, sea tratar de ajustar una recta de regresión si el movimiento extra-estacional se presenta como más o menos lineal, sea incluso tratar de ajustar una recta de regresión a partir de los logaritmos de las medias móviles, si el movimiento extra-estacional es de forma exponencial.

d) Aplicación de los coeficientes estacionales a los valores extrapolados

Se llega así a una previsión de la tendencia. Se multiplica cada resultado por el coeficiente estacional adecuado para obtener una previsión de los datos brutos.

e) Ejemplo numérico

Se desea tener una previsión del número de matrimonios en Francia para enero y octubre de 1982, a partir de los datos precedentes.

a) Se constata, en la representación gráfica de la fi-

figura 11 que el movimiento extra-estacional se divide en dos partes: La primera corresponde a una situación de baja o de estacionamiento, hasta julio de 1980, a partir de julio de 1980 hay una bajada más fuerte.

El previsionista se enfrenta entonces a tres hipótesis posibles al menos:

1) La bajada observada desde hace un año es accidental; volverá a haber crecimiento dentro de algunos meses. En este caso, deduce que el movimiento tendencial va a volver a ser de alrededor de 28 mil matrimonios, y establece sus previsiones en consecuencia:

Enero del 82, $28 \times 0,41 = 11,48$ es decir alrededor de 11.500 matrimonios

Octubre del 82, $28 \times 0,89 = 24,92$ es decir alrededor de 25.000 matrimonios

2) La bajada es regular y va a continuar. En este caso la hipótesis de una correlación lineal entre el tiempo y las medias móviles se puede comprobar por el pasado. Se considera la serie doble de la tabla siguiente.

TABLA 3
Estudio de una correlación lineal entre las medias móviles y el tiempo

Tiempo (X)	Media móvil (Y)
1 (julio 78)	29,3
2	29,1
3	29,2
.	.
29 (noviembre 80)	27,0
30 (diciembre 80)	26,8

Se obtiene:

$$\bar{x} = 15,50 \text{ (mes)}$$

$$\bar{y} = 28,13 \text{ (millones de matrimonios)}$$

$$\sigma_x = 8,66 \text{ (mes) desviación típica de } x$$

$$\sigma_y = 0,57 \text{ (miles de matrimonios) desviación típica de } y$$

$$\sum x_i y_i = 12\ 948,7$$

El coeficiente de correlación es:

$$r = -0,90$$

Es bastante satisfactorio el resultado. Se puede pues ajustar una recta por el método de los mínimos cuadrados, con:

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{\text{covarianza de } X \text{ y de } Y}{\text{varianza de } X}$$

$$= \frac{-4,44}{74,92} = -0,0593$$

de donde se deduce la ecuación:

$$y = 28,13 - 0,0593(x - 15,5)$$

Resulta pues, para el mes de enero de 1982 (mes 43)

$$\hat{y} = 28,13 - 0,0593(43 - 15,5) = 26,5 \text{ miles de matrimonios}$$

(en tendencia) y para el mes de octubre de 1982 (mes 52)

$$\hat{y} = 26 \text{ miles de matrimonios}$$

de donde las previsiones en variaciones estacionales, en enero de 1982 son los siguientes:

$$26,5 \times 0,41 = 10\ 900 \text{ matrimonios}$$

y en octubre de 1982:

$$26 \times 0,89 = 23\ 100 \text{ matrimonios}$$

3) Una tercera hipótesis consiste en no retener la tendencia más que desde julio de 1980 ya que la bajada parece más acentuada después. Empleando el mismo método, se obtiene pues la cifra provisional de 9 800 matrimonios en enero de 1982 y la de 19 800 matrimonios en octubre de 1982.

C. OTROS METODOS

El método de extrapolación que acabamos de utilizar se aplica particularmente a las series de carácter estacional. Sin embargo, una extrapolación por el método de los mínimos cuadrados se puede utilizar para toda la serie que, desestacionalizada o no, presente gráficamente la forma de una recta o de una exponencial.

Otros métodos se pueden aplicar a series cualesquiera. Citemos en particular el *alisado exponencial*:

Este método consiste en prever los datos futuros en función de los datos pasados. Se da una constante β de alisado inferior a uno. La previsión en la fecha $t + 1$ se deduce de las precedentes $x_t, x_{t-1} \dots x_0$ por la fórmula:

$$\hat{x}_{t+1} = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j x_{t-j}$$

lo que se puede escribir también:

$$\hat{x}_{t+1} = \beta \hat{x}_{t-1} + (1 - \beta) x_t$$

Operar un alisado exponencial, es prever el futuro en función del pasado, dando más importancia al pasado próximo que al pasado lejano.

D. CONCLUSIONES SOBRE LOS METODOS DE PREVISION

Hemos dicho ya en varias ocasiones que este curso está lejos de ser una exposición completa de los métodos existentes. Sin embargo, quisieramos hacer un número de reflexiones generales a partir del ejemplo de los matrimonios del párrafo B:

1.- Las previsiones según las tres hipótesis son sensiblemente diferentes. La elección de una de esas hipótesis o de otra depende aún de una reflexión sobre el fenómeno. Se debe hacer un estudio demográfico y sociológico de manera que responda a cuestiones tales como:

- ¿La bajada del número de matrimonios es debida a una bajada demográfica (clases de edades menos numerosas que llegan a la edad del matrimonio)?

- ¿Es debida a una actitud moral (cohabitación preferida al matrimonio)?

- ¿Es accidental (por ejemplo unida a la situación económica inmediata)?

Tales cuestiones se muestran difíciles incluso para los especialistas.

2.- Es fundamental cuando se da una cifra previsional, añadir a ésta una estimación de los grados de incertidumbre de los que está afectada esta cifra. El grado dado de incertidumbre se traduce por un intervalo de valores que será más o menos grande según la calidad de la previsión.

En el caso del ejemplo, nuestro análisis conduciría a indicar que los números de matrimonios previstos están comprendidos entre los de la primera hipótesis y los de la tercera.

Para enero de 1982: entre 9.800 y 11.500 matrimonios

Para octubre de 1982: entre 19.800 y 25.000 matrimonios.

3.- El ejemplo ha sido elegido voluntariamente con datos antiguos. Se conocen los números reales de matrimonios en 1982: en enero 11.408 matrimonios y en octubre 27.415. Los resultados observados son pues incluso más elevados que en la mejor de las hipótesis. Un examen atento de la evolución del número de matrimonios en Francia desde 1980 muestra sin embargo una bajada importante. El fracaso de la hipótesis *baja* es en efecto el fracaso del estudio mensual: aquí se produce un fenómeno análogo al que hemos examinado agrupando los meses de mayo y de junio. Un buen estudio previsional hubiera debido ser hecho en período pasado más largo y eligiendo otra unidad distinta que el mes.

Estas tres notas ponen en evidencia las numerosas reflexiones y matriciales que deben acompañar a la aplicación de los métodos estadísticos.

II. TEORIA DE LOS INDICES ESTADISTICOS

1. ¿QUE ES UN INDICE?

La palabra índice se emplea en muchos sentidos diferentes. Cada vez más se hace en un sentido estadístico: Nosotros intentaremos profundizar en este aspecto a continuación, pero comenzemos por recensar todos los significados posibles. Las definiciones del Petit Robert diccionario francés usual nos podrán ayudar:

INDICE- I, **el signo aparente que indica probabilidad**-
-2º Dr. Hecho conocido que sirve para constituir la prueba por presunción ...

No detallaremos estos significados pues no se trata de índices estadísticos, pero retenemos que un índice muestra, permite descubrir un fenómeno sin dar la certidumbre de que este fenómeno exista (es lo que significa el con probabilidad de Robert).

II [1869] Sc y cour. 1º indicación numérica o literal que sirve para caracterizar un signo - Math. Carácter pequeño que se coloca debajo y a la derecha de la letra que caracteriza: a_0 , a_1 , a_n leyéndose a índice cero, a índice uno, a índice n - 2º Indicación numérica que sirve para expresar una relación. Índice de refracción de la luz, - Índice de octano de un carburante, - índicecefálico-3º (Deb. XX) número que indica la razón entre el precio medio unitario de un artículo en el período dado, y el de este mismo artículo en el período de base, en el que es expresado con el número 100. Índice de precios o numerosos índices ... índice general de precios: media aritmética de los índices unitarios...

Los tres sentidos expresados aquí son todos ellos científicos. Vamos a utilizar bastante a menudo la palabra índice en la acepción número uno, pero es la tercera la que es objeto de este estudio. Se debe dar pues una significación más precisa (y más exacta) de lo que nosotros llamamos índices estadísticos.

Un índice estadístico es siempre una razón, expresada generalmente multiplicándola por cien. Se calcula un índice para comparar resultados numéricos, en el tiempo o en el espacio, bajo una forma más expresiva que los datos brutos.

Existen dos grandes categorías de índices estadísticos que van a ser explicitadas a continuación en este capítulo:

- Los índices simples, calculados como la relación de dos valores de una magnitud (que no son necesariamente como parece afirmar el Robert, precios). Por ejemplo: índice del precio del pan, índice de los efectivos de obreros en la industria ...

- Los índices sintéticos, en los cuales intervienen varias magnitudes; ejemplo: índice general de precios, índice de la producción industrial.

2. LOS INDICES SIMPLES

Se habla pues de un índice simple cada vez que se tienen que comparar dos magnitudes, sea en el tiempo, sea en el espacio y que se efectúa su razón.

A. COMPARACION DE MAGNITUDES EN EL TIEMPO

Un ejemplo permite comprender lo que es un índice simple que se llama también índice elemental, índice particular, o índice analítico. El precio del kilo de bistec en París era de 11,05 francos en 1960 (año que elegimos como base afectándole con un cero) (2): era de 104,03 Francos el kilo (filete) en 1982: 76,36 Francos en 1980 y 71,88 en 1979. Llamamos j al año corriente: este será sucesivamente aquí 1979, 1980 y 1982. Se elige un sólo año de base, el que sirve de referencia y para el cual el índice vale cien pero puede haber varios años corrientes.

Calculamos el índice de precios de bistec en 1982, base 100 en 1960 y para ello calculamos la relación de los dos precios: nosotros los designamos por $i_{j/o}$ o también $i_{82/60}$ (i minúscula para una relación, j/o o también $82/60$ son índices en el sentido primero del Petit Robert. El primero designa el año corriente y el segundo el año de base. Se lee i , j , cero o i , 82 , 60):

$$i_{j/o} = \frac{104,03}{11,05} = 9,41$$

El índice buscado es igual a 100 veces esta relación. Utilizaremos la i minúscula para la razón y la I mayúscula para el índice:

$$I_{82/60} = 100i_{82/60} = 9,41$$

Cuando se trata como aquí de precios, se dice a veces

que el precio relativo del bistec es 941 en 1982 en la relación a la base 100 en 1960; esto quiere decir que el precio de 1982 es 941 veces el de 1960).

Más generalmente se designa por índice simple de una magnitud a la razón (expresada en porcentajes) de los valores x_j y x_0 tomados para esta magnitud en dos fechas diferentes (señaladas con j y 0 , siendo 0 el año de base):

$$I_{j/0} = 100 \frac{x_j}{x_0}$$

Mientras que se conserva siempre el mismo año de base, por ejemplo 1949. El índice relativo para el año de base es:

$$I_{0/0} = 100 \frac{x_0}{x_0} = 100$$

Se dice pues que el índice tiene como base 100 el año 0... a continuación de este texto el símbolo $i_{j/0}$ designa la razón de los dos valores, previa multiplicación por 100. El símbolo $I_{j/0}$ se reservará para el índice. Despues de esta multiplicación:

$$i_{j/0} = \frac{x_j}{x_0},$$

$$I_{j/0} = 100i_{j/0}$$

Se puede calcular así el índice de precios del bistec de base 1960 = 100 para todos los datos dados anteriormente, reemplazando sucesivamente la letra j por 1965, 1979. Se obtiene así la tabla de índices estadísticos siguientes:

TABLA 4
Índice del precio de bistec (por kilo)

Fecha	Precio	Índice
1960	11,05	100,0
1965	14,07	127,3
1979	71,88	650,5
1980	76,36	691,0
1982	104,03	941,4

La serie de índices simples permite darse cuenta más fácilmente del crecimiento que la serie de los precios: multiplicación por 1,3 de 1960 a 1965, por 6,5 de 1960 a 1979 ...

La utilización de tales índices facilita la comparación de los crecimientos. A título de ejemplo, he aquí varios productos de los que se ha calculado el índice de precios de 1982, base 1960 = 100:

TABLA 5
Precios e índices de precios de varios productos
en 1980, base 100 en 1960 en Francia

Nº	Producto	Precio		Índice 1982 base 100 en 1960
		1960	1982	
1	1 kg de pan	0,62	7,60	1 225,8
2	1 kg de patatas	0,32	4,15	1 296,9
3	1 kg de bistec	11,05	104,03	941,4
4	1 plancha	18,90	129,00	682,5
5	1 billete de metro (Paris)	0,33	2,03	615,2
6	1 estancia diaria en hospital	60,00	885,00	1 475,0
7	1 corte de pelo (hombre)	2,50	26,63	1 065,2

La comparación de los índices 1982 permite distinguir productos cuyo precio ha subido poco desde 1980: El billete de metro, la plancha, el kilo de bistecs; otros cuyo precio ha subido mucho: la jornada de hospital, el kilo de pan o el de patatas ... Las irregularidades del alza de precios se deben en general a la desigualdad del progreso técnico: este es débil para los servicios (llamados *terciarios*: jornada de hospital, corte de pelo, servicio del panadero incluida la venta del pan), importante para los productos manufacturados (*secundarios*: la plancha la cual se puede asimilar también el metro de París que se ha beneficiado de numerosas transformaciones técnicas), medio para los productos agrícolas (*primarios*).

B. COMPARACIONES EN EL ESPACIO

Escojamos una serie, desde luego muy bien presentada en la *Panorámica 1984* de la Comunidad Autónoma de Euskadi, la del número de teléfonos por cada 100 personas (figura 13)

100 persones bakoitzeko telefono-kopurua (1981)
Teléfonos por cada 100 personas (1981)

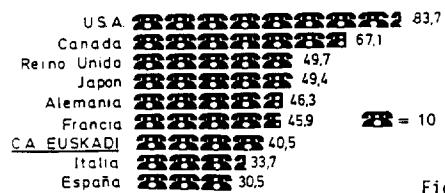


Fig. 13

Sin hacer dibujos tan bonitos (pero también con un resultado peor) se pueden calcular índices elementales que pueden ayudar a hacer comparaciones. Se puede elegir como base cualquier país. Escojamos dos ejemplos: base 100, el País Vasco y base 100, España.

Las dos series de índices son desde luego proporcionales. Se lee en ellas por ejemplo que los Estados Unidos tienen 2,74 veces más teléfonos por habitante que España, o que el País Vasco tiene un tercio de teléfonos más que el conjunto de España.

TABLA 6

País	Números	Indice:C.A. Euskadi = 100	Indice:España = 100
U.S.A.	83,7	207	274
Canada	67,1	166	220
Reino Unido	49,7	123	163
Japon	49,4	122	162
Alemania	46,3	114	152
Francia	45,9	113	150
País Vasco	40,5	100	133
Italia	33,7	83	110
España	30,5	75	100

C. PROPIEDADES DE LOS ÍNDICES SIMPLES

Se trata de propiedades matemáticas simples al mismo tiempo que útiles. Uno de los dramas de la teoría y del uso de los índices es que estas propiedades, evidentes para los índices simples, no existen, en general, para los índices más complejos de los que vamos a hablar a continuación.

a) Identidad

Se dice que un índice tiene la propiedad de identidad cuando toma el valor 100 el año de base: es la propiedad ya señalada que puede ser traducida por las igualdades:

$$i_{0/0} = 1 \quad y \quad I_{0/0} = 100$$

b) Reversibilidad

Volvamos al ejemplo de bistec. Hemos calculado ya $I_{60/82}$ y $I_{82/60}$. Se puede constatar que:

$$i_{82/60} = \frac{1}{i_{60/82}} \quad \text{car } 9,414 = \frac{1}{0,106}$$

Esta propiedad es general para los índices simples:

$$i_{j/o} = \frac{x_j}{x_o} \quad i_{o/j} = \frac{x_o}{x_j}$$

$$i_{j/o} = \frac{1}{i_{o/j}} \quad I_{j/o} = \frac{10\,000}{I_{o/j}}$$

Un índice es reversible si se obtiene el mismo resultado numérico calculando el índice de la fecha j con relación a la fecha 0 y calculando el índice de la fecha 0 con la relación a la fecha j y calculando el inverso (salvo un coeficiente).

c) Circularidad

El índice del precio del bistec en 1980, sobre base 1979 es:

$$I_{80/79} = 100 \frac{P_{80}}{P_{79}} = 100 \frac{76,36}{71,88} = 106,2$$

Para calcular el índice del año 1980 con relación al año 1960 se pueden emplear dos métodos:

- El método directo:

$$I_{80/60} = 100 \frac{P_{80}}{P_{60}} = 100 \frac{76,36}{11,05} \approx 691,0$$

- Un método indirecto que permite utilizar el resultado de $I_{80/79}$:

$$\frac{1}{100} I_{80/79} \times I_{79/60} = \frac{1}{100} 106,2 \times 650,5 = 691$$

Se constata que los dos métodos dan el mismo resultado:

$$I_{80/60} = \frac{1}{100} I_{80/79} \cdot I_{79/60}$$

Es la propiedad de circularidad. Se dice que se pueden encadenar los índices simples: el índice base 1979, $I_{80/79}$ estando encadenado sobre el índice base 1960, /

$I_{79/60}$ para dar el índice $I_{80/60}$ de base 1960 que compone las dos extremidades de la cadena.

Un índice posee la propiedad de circularidad si las relaciones correspondientes verifican la relación:

$$i_{2/0} = i_{2/1} \cdot i_{1/0} \quad (1)$$

0, 1 y 2 siendo tres fechas o tres lugares cualesquiera.

Esta propiedad se verifica para los índices simples pues:

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0} .$$

d) Aplicaciones de estas propiedades**1. Cambio de base**

Si se conoce un índice que posea la propiedad de circularidad sobre una base 0, es posible calcular este mismo índice sobre otra base t, a partir del primer índice, y del índice de la nueva base t, con relación a la antigua, 0:

$$i_{j/t} = \frac{i_{j/o}}{i_{t/o}}$$

$$i_{j/o} = i_{j/t} \cdot i_{t/o}$$

Así conociendo el índice del precio del bistec sobre la base 1960, en 1979: 650,5 y en 1982: 941,4, se puede calcular este mismo índice sobre la base 1979:

$$I_{82/79} = 100 \frac{I_{82/60}}{I_{79/60}}$$

De donde:

$$I_{82/79} = 100 \frac{941,4}{650,5} = 144,7$$

Se dice que los índices simples son transferibles: se puede transferir la base de 1960 a 1979 o de 0 a t (3)

Los índices de los números de teléfonos por habitantes, han sido calculados en los dos casos a partir de datos brutos; pero es posible transferir el índice de

base del País Vasco para obtener el que tiene por base España. Basta multiplicar el primer índice por $40,5/30,5 = 1,3279$ (Puede ser que haya pérdida de precisión pero los resultados son los mismos).

2. Encadenamiento de índices sucesivos

La propiedad de circularidad se puede generalizar: Se pueden encadenar varios índices:

$$i_{3/0} = i_{3/2} \cdot i_{2/1} \cdot i_{1/0} \quad (2)$$

$$i_{j/0} = i_{j/j-1} \cdot i_{j-1/j-2} \cdot \dots \cdot i_{2/1} \cdot i_{1/0} \quad (3)$$

los $i_{5/4}$, $i_{4/3}$... se llaman eslabones

Esto significa para el bistec:

$$i_{82/60} = i_{82/80} \times i_{80/79} \times i_{79/65} \times i_{65/60}$$

Es decir, desarrollando las razones:

$$\frac{104,03}{11,05} = \frac{104,03}{76,36} \times \frac{76,36}{71,88} \times \frac{71,88}{14,07} \times \frac{14,07}{11,05}$$

De esta forma es fácil mostrar que esta propiedad es válida para todos los índices elementales: se pueden encadenar los índices elementales.

3. Empalme de índices

Según el punto anterior es claro que si se tiene un índice que presenta la propiedad de la circularidad, se pueden calcular diferentes eslabones y encadenarlos, (o empalmarlos) con la ayuda de la fórmula (3).

4. Índice de una magnitud producto de otras dos magnitudes

Si una magnitud simple g es el producto de otras dos, h y k , el índice elemental de g es igual al producto de índices elementales h y k . Esta propiedad se aplica en particular a la igualdad:

$$\text{Valor} = \text{precio} \times \text{cantidad}$$

Un índice elemental de valor para un producto dado es el producto del índice elemental del precio de este producto por el índice elemental de la cantidad de este

producto.

3. Noción de índice sintético

Hasta aquí, los índices considerados han sido los índices simples: estos índices no son relativos más que respecto de una sola magnitud.

Sin embargo para aprehender una realidad compleja lo más frecuente es que haya que resumir en uno sólo varios índices simples (por ejemplo: los índices de precios al por menor, los índices de varias ramas de la producción industrial). Se habla entonces de índice sintético, o índice de conjunto, o índice global. De esta manera el índice sintético del costo de la vida en Francia resume los índices elementales de los precios de 259 puntos de venta.

Desde ahora una noción fundamental debe ser anunciada: es imposible resumir de una manera única e indiscutible varios índices elementales. Así, mientras que dados dos números x_j y x_0 existe un sólo índice analítico $i_{j/0}$: por el contrario dados dos o más índices analíticos, existen varios índices sintéticos que tienden a resumirlos; cada uno tiene ventajas, pero también inconvenientes con relación a los demás; ninguno tiene todas las ventajas, todo el poder de información que el espíritu humano desearía encontrar en él. Es pues imposible afirmar que uno de estos índices sintéticos es exacto, mientras que los demás serían falsos. Las diferentes fórmulas de índices sintéticos que serán estudiados aquí, no dan los mismos resultados, y cada resultado no tiene significado más que con referencia a la fórmula que le ha dado nacimiento.

La mayoría de los índices sintéticos no tienen las propiedades de reversibilidad y de circularidad. De ello resulta que no se pueden encadenar, ni hacer un cambio de base por simple multiplicación por un coeficiente.

Para cambiar de base un índice sintético, en general hay que volver a comenzar todo el cálculo ya hecho con la nueva base. No se puede utilizar el índice calculado con la antigua base.

Ocurre sin embargo a veces que es más fácil utilizar un índice de base 0 llevándolo a 100, otro año, t , por un cálculo análogo al de la transferencia (multiplicación por 100 sobre el índice del año t). El cálculo no da pues el mismo resultado que un cambio de base (salvo si el índice es circular y reversible). Designaremos en este caso como origen el año t y diremos que se ha ope-

rado un cambio de origen. El índice obtenido, será siempre un índice de base 0, pero se presentará sobre origen t.

En los párrafos que vienen a continuación se hará una revisión de los principales métodos de cálculo de los índices sintéticos.

4. LOS INDICES: MEDIAS SIMPLES

Los primeros índices sintéticos que van a ser estudiados son las medias simples. La finalidad de los índices sintéticos es resumir un conjunto de índices elementales, y por lo tanto la primera solución que se presenta consiste en calcular la media: media aritmética simple, pero también armónica o media geométrica. En el presente capítulo, hablaremos igualmente de las relaciones de agregados simples.

Estos índices tienen en común el hecho de que ninguna ponderación explícita aparece en los cálculos de suma y de media. Pero las sumas simples en efecto se calculan con ponderaciones implícitas, a menudo mal conocidas por el calculista y que no tienen sentido.

En el párrafo siguiente estudiaremos los índices calculados con ayuda de ponderaciones explícitas cuya significación económica es mayor.

A) LA MEDIA ARITMÉTICA

a) Definición

Se tratará aquí de la media aritmética simple de los índices elementales:

$$A = \frac{\sum_{j=1}^n I_j}{n}$$

Con los índices simples de la tabla 5:

$$A_{82/60} = \frac{\sum_{j=1}^7 I_{60}^j}{7} = \frac{7302,0}{7} = 1043,1$$

Se puede decir que el alza media del precio de estos siete productos se mide por el índice 1 043 en 1982 para 100 en 1960.

b) Ventajas de esta fórmula

- Es simple, accesible, conocida por todos y tiene la propiedad de identidad.

- Está perfectamente definida, es decir determinada de manera única a partir de los índices elementales dados.

- Es sensible. Se emplea esta palabra un poco en el mismo sentido que para la sensibilidad de una balanza: un índice sintético se dice que es sensible si basta que uno de los índices elementales cambie incluso poco, para que el índice sintético sea afectado por ello.

- Puede ser tratada algebraicamente: si se calcula la media aritmética de algunos índices elementales, es inútil rehacer todo el cálculo para añadir o eliminar un índice: se puede, por el contrario, lo que es mucho menos largo, utilizar los resultados anteriormente adquiridos.

Por ejemplo, el índice de los tres productos alimenticios de la tabla 5 es:

$$A = \frac{\sum_{j=1}^3 I_{60}^j}{3} = \frac{3464,1}{3} = 1154,6$$

Si se quiere tener en cuenta el índice de precios de la plancha se puede partir de esta cifra $A = 1154,6$.

$$A' = \frac{3A + I_{60}^4}{4} = \frac{3464,1 + 682,5}{4} = 1036,6$$

Se obtiene el mismo resultado que si se calcula el índice media aritmética de los índices de los 4 primeros productos sin valerse de A.

Tiene, en una cierta medida un sentido económico unido a las ponderaciones implícitas de la media que vamos a precisar:

El índice se calcula en general no solamente para el año 1982 sino para todos los años de 1960 hasta hoy. Por consiguiente, para cualquiera que sea el año se compara en el tiempo el precio de las mismas cantidades físicas de cada producto. Son las cantidades que costaban 100 F el año de base. En el ejemplo, para un año corriente i, y n productos:

$$A_{i/0} = \frac{\sum I_{i/0}^j}{n} = \frac{100}{n} \sum_{j=1}^n \frac{p_i^j}{p_0^j}$$

Lo que puede escribirse:

$$A_{i/0} = 100 \frac{\sum_j \frac{1}{p_0^j} p_i^j}{\sum_j \frac{1}{p_0^j}}$$

La media aritmética se escribe aquí bajo la forma de la relación de dos sumas ponderadas de precios: los precios del año corriente en el numerador, los del año de base en el denominador. Las ponderaciones son las inversas de los precios del año de base: $100/p_0^j$ para el precio del artículo j , es decir la cantidad del producto j que valía 100 Francos el año de base. Son las ponderaciones implícitas de este índice.

De esta manera en la media A anterior se han comprado en 1982 y en 1960 los precios de:

100 F de pan	es decir	$\frac{100}{0,62}$	kg o 161,29 kg;
100 F de patatas	es decir	$\frac{100}{0,32}$	kg o 312,5 kg;
100 F de bistec	es decir	$\frac{100}{11,05}$	kg o 9,05 kg.

Estas cantidades físicas de alimentos forman lo que se llama a menudo una cesta de la compra. Si se calcula la media aritmética simple, base 1960, para otro año, por ejemplo 1979, son las mismas cantidades físicas de cada producto (161,3 Kg de pan, etc.) las que se comparan. El índice estudiado aquí sigue en el tiempo las variaciones de precios de una cesta fija.

Con los índices de Laspeyres y de Paasche, se presentarán otros índices para los cuales las cestas de la compra corresponderán a un consumo observado, mientras que aquí son arbitrarios. En efecto ¿qué significa tomar 100 F. de cada artículo?. Esto depende únicamente de los precios: un artículo barato se toma en consideración para una cantidad física (volumen, peso, superficie) más grande que un artículo caro y esto no tiene nada que ver con un consumo observado. El presupuesto de gastos de la media aritmética simple puede sin embargo tener un sentido económico razonable, si los artículos se eligen convenientemente. Por el contrario, si la elección de los artículos se hace bien, el resultado puede que no sea muy diferente del que se obtendría con índices ponderados (Cf. Párrafo 4).

Se podría trasponer lo que se acaba de decir a índice de cantidad o a cualquier otro índice.

c) Inconvenientes de esta fórmula

La media aritmética tiene sin embargo dos inconvenientes graves, el primero de orden económico, el otro de orden estadístico:

Basta mirar la cesta de la compra anterior para ver que la importancia de cada producto en el índice es inversamente proporcional a su precio del año de base; si se encuentra a continuación que en el periodo estudiado las patatas que eran baratas en 1960, suben fuertemente, la variación de su precio va a afectar mucho a su índice (por consiguiente, resulta justamente que el índice elemental de la patata es uno de los más elevados en la tabla de 1982).

En un período de inflación, como el periodo actual, todos los precios suben; por consiguiente, la media aritmética da a los precios que suben rápido una importancia mayor que a los que suben lentamente: si el precio de un artículo aumenta en un cuarto, mientras que el de otro se dobla, el índice de estos dos artículos se convierte en:

$$\frac{125 + 200}{2} = 162,5$$

La parte del segundo artículo en el índice es casi el doble que el del primero.

A. Julin (4) concluye diciendo: esta clase de media exagera la importancia de un alza general y subestima una caída general de precios.

Para cambiar de base (5), hace falta rebacer todo el cálculo. El índice sintético, media aritmética simple, no tiene la propiedad de reversibilidad. En efecto, ha sido calculado sobre los índices de la tabla 5:

$$A_{82/60} = 1043,1$$

Si el índice fuera reversible, se podría calcular el índice base en 1982 mediante:

$$\frac{10^4}{A_{82/60}} = \frac{10^4}{1043,1} = 9,6$$

Este cálculo no deja de tener valor: se dice que se ha puesto el índice de base 1960 con origen 1982 = 100. Pero el resultado es diferente del que da el cálculo directo sobre la base 1982:

$$A_{60/82} = \frac{73,6}{7} = 10,5$$

La media aritmética no es reversible. Un ejemplo de Pierson (6) citado por Lucien March (7) y revisado por

Jean Fourastié permite ver la gravedad de este defecto:

TABLA 7

Medias aritméticas de bases diferentes
(siendo A el índice media aritmética)

Año	Precio		Indices, base 1900			Indices, base 1915		
	Trigo	Caucho	Trigo	Caucho	A	Trigo	Caucho	A
1900	20	20	100	100	100	50	200	125
1915	40	10	200	50	125	100	100	100

Resulta con la base 100 en 1900 que los precios globales han subido un 25% entre 1900 y 1915 y con la base 100 en 1915 han bajado un 25% entre estas dos fechas! Esta contradicción se debe a que los pesos retenidos en las comparaciones corresponden a presupuestos absolutamente diferentes, el problema no es como se podría creer que un mismo índice sea leído en los dos sentidos sino que se tienen dos índices diferentes.

Con la base 100 en 1900, las cantidades son 5 kg de trigo y 5 kg de caucho que valen cada uno 100 francos en 1900. Con la base 100 en 1915, el segundo índice sirve para comparar los precios de 2,5 kg de trigo y de 10 kg de caucho. Es normal que el índice de base 1900, que hace intervenir mucho al trigo, sube, mientras que el índice de base 1915 en el cual el movimiento del precio del caucho aparece sobre el del trigo, baja.

Esperamos que este ejemplo permita al lector comprender la distinción ya anotada entre base y origen. Los dos índices media aritmética simple de bases diferentes, son dos índices diferentes. Por el contrario, se puede poner el índice de base 1915 con origen en 1900: resulta ser 80 en 1915 y naturalmente 100 en 1900. Con este origen, el índice base en 1915 es más fácil de comparar con el índice base 1900.

Esta imposibilidad de cambiar de base sin rehacer todo el cálculo tiene evidentemente como consecuencia la no circularidad:

$$A_{2/0} \neq A_{2/1} \cdot A_{1/0}$$

B. LA MEDIA ARMONICA

La media armónica no presenta las mismas ventajas que la media aritmética ya que está lejos de ser simple y conocida por todos. No se definirá pues aquí, más que muy rápidamente.

a) Definición

La media armónica de varios números es la inversa de la media aritmética de los inversos de estos números:

$$\frac{1}{H_{1/0}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{I_j}$$

Por ejemplo, tomando siempre los tres primeros artículos de la tabla 5:

$$H_{82/60} = \frac{3}{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{I_j}} = \frac{3}{\frac{1}{1225,8} + \frac{1}{1296,9} + \frac{1}{941,4}} =$$

$$= 1132,5$$

b) El interés esencial de la media armónica, es que es idéntica a la media aritmética calculando remontando

el tiempo, es decir con base en el año 1, pero tomando como origen el principio del periodo.

En efecto:

$$A_{0/i} = \frac{1}{n} \sum_j \frac{10^4}{I_j^{1/0}}$$

Si se calcula esta media aritmética con origen 0, se obtiene:

$$A_{0/i} = \frac{1}{10^4 \sum_j \frac{1}{I_j^{1/0}}} = H_{i/0}$$

Verifiquémoslo en el ejemplo siguiente. Para obtener $H_{60/82}$ calculemos los índices elementales con base 100 en 1982 e utilicemos sus inversos.

$$H_{60/82} = \frac{3}{\frac{1}{8,16} + \frac{1}{7,71} + \frac{1}{10,62}} = \frac{3}{0,346} = 8,66$$

Por consiguiente, si se calcula la media aritmética encontrada anteriormente con origen en 1960, se obtiene:

$$\frac{10\ 000}{1\ 154,7} = 8,66$$

La media armónica tiene pues las mismas ventajas y los mismos inconvenientes que la media aritmética. Sin volver a repetir todo lo que se ha dicho anteriormente a propósito de la media aritmética, digamos una palabra del aspecto económico. Ya que se trata de la inversa de una media aritmética, la media armónica compara igualmente en el tiempo cantidades físicas idénticas de los artículos considerados, en los años 0 y j. Pero esta vez, estas cantidades físicas representan lo que costaba 100 francos el año j (año corriente) y no el año de base: el presupuesto considerado cambia pues cada año. En efecto:

$$H_{1/0} = 100 \frac{\frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{p_j}{p_0}}}{\frac{\sum_{j=1}^n p_j}{p_1}} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} p_1^j}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_0} p_1^j} \times 100$$

La media armónica se presenta como la relación de dos sumas ponderadas. Las ponderaciones: las mismas en el numerador y en el denominador: Los coeficientes $1/p_j$ son inversamente proporcionales a los precios del año corriente. Contrariamente a la media aritmética, la media armónica exagera la baja y subestima el alza del nivel de precios (8).

C. LA MEDIA GEOMÉTRICA

La media aritmética y la media armónica presentan un cierto número de inconvenientes; en particular no poseen la propiedad de circularidad: Es incorrecto hacer sobre estas medias cambios de base o empalme; si se operan sobre ellas cambios de origen hay que tener cuidado en distinguir explícitamente el origen de la base.

Otro inconveniente es que la media aritmética exagera el alcance de un alza general de índices y subestima el de una baja general; la media armónica tiene la tendencia inversa. Por este motivo la media geométrica que no presenta estos inconvenientes ha sido a veces considerada para los cálculos de índices sintéticos.

a) Definición

La media geométrica es la raíz enésima del producto de los n números de los que se busca la media:

$$G_{1/0} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n I_j^{1/0}} = (\prod_{j=1}^n I_j^{1/0})^{1/n}$$

Señalemos que es la relación de las medias geométricas simples de las magnitudes en dos épocas:

$$G_{1/0} = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j^1}}{\sqrt[n]{\prod_{j=0}^n x_j^0}}$$

Por ejemplo, con los tres índices de la tabla 5:

$$G_{82/60} = \left(\prod_{j=1}^3 I_j^{1/0} \right)^{1/3} = (1\ 225,8 \times 1\ 296,9 \times 941,4)^{1/3}$$

de donde:

$$G = 1\ 143,8$$

b) Ventajas

- La media geométrica está perfectamente definida, determinada de manera única y tiene la propiedad de identidad.

- Es sensible.

- Puede ser tratada algebraicamente: si se quiere añadir un cuarto índice a los tres precedentes se tiene:

$$G'_{82/60} = \sqrt[4]{\prod_{j=1}^4 I_j} = (G^3 \times 682,5)^{1/4} = 1005,3$$

Se encuentra el mismo índice utilizando la media ya calculada que tratando directamente los 4 índices.

- Satisface la condición de circularidad:

En efecto:

$$G_{2/0} = G_{2/1} \cdot G_{1/0}$$

ya que:

$$\frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_2^j}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_0^j}} = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_2^j}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_1^j}} \times \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_1^j}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_0^j}}$$

Por tanto la media geométrica es reversible y se pueden operar sobre ella cambios de base sin rehacer todos los cálculos: cambiar aquí de origen es lo mismo que cambiar aquí de origen es lo mismo que cambiar de base. Es una propiedad útil que no tenían las otras medias ya estudiadas.

No presenta la misma disimetría que la media aritmética.

Citemos a M. Olivier que describe las causas de distorsión que se producen en el cálculo de una media aritmética (9): los precios de la época que se estudia son comparados con los precios correspondientes de la época de base que se toman iguales a 100. Todo aumento de un precio, superior a 100%, no puede ser compensado aritméticamente por la disminución de un sólo precio, ya que

un precio no puede ser negativo ... es una forma de media que no introduciría esta disimetría, es la media geométrica. En efecto, no importa qué desviación más puede ser compensada geométricamente por una desviación en menos e inversamente: un precio relativo que es n veces mayor que la media se compensa geométricamente con un precio relativo que es n veces más pequeño que la media.

c) Inconvenientes de la media geométrica

- No tiene significado económico.

Es imposible encontrar como se ha dicho para los índices precedentes una cesta de la compra cuya media geométrica siguiera las variaciones.

Algunos autores habían pensado que los precios se repartían al azar en torno a un índice monetario. El argumento citado anteriormente según M. Olivier muestra que es imposible que exista un reparto al azar en torno a la media aritmética. Estos autores suponían que los logaritmos de los índices de los precios se repartían en torno a la media geométrica (dicho de otro modo que los índices de precios seguían una ley de Galton o que sus logaritmos seguían una ley Gauss). Desde hace mucho tiempo esa hipótesis no se defiende ya. F. Divisia (1926) ha mostrado que no se verificaría más que si todos los precios fuesen independientes; todos los precios dependen unos de otros y precisamente por medio de la moneda, pues la suma de dinero que un individuo destina a ciertas compras no puede afectar a otras (10). Los precios dependen igualmente unos de otros por los costos de producción que son afectados de manera variable con el progreso técnico.

- La media geométrica no es simple, y en todo caso es poco familiar. Pues un índice para ser utilizable por todos debe ser comprensible para todos.

- No es un cálculo muy fácil ya que hay que utilizar los logaritmos o calculadores capaces de utilizar la notación exponencial (para no sobrepasar la capacidad) y que posean una tecla y^x .

D. RELACIONES ENTRE ESTAS TRES MEDIAS

Se demuestra que existe una relación de desigualdad siempre verificada entre estas tres medias:

$$H \leq G \leq A$$

En el caso de los tres artículos que han sido elegidos como ejemplo a lo largo de este párrafo los resultados son:

$$H = 1\ 132,5 \quad G = 1\ 143,8 \quad A = 1\ 154,7$$

y verificándose esta desigualdad.

Cuando los índices elementales son dispersos (lo que es frecuente en un periodo largo) ocurre a menudo que aparecen divergencias importantes entre los índices sintéticos calculados según estas tres fórmulas. El problema es entonces el de elegir: ¿alguna de estas fórmulas es la mejor?

Nos encontramos ante el famoso problema de Florencia planteado por Galileo de si un caballo vale 100 coronas y dos personas estiman su valor, una en 10 coronas y la otra en 1000, ¿son igualmente erróneas estas dos estimaciones? si no ¿cuál de las dos es más errónea? Los defensores de la media aritmética (Nozzolini) declaraban que la estimación de 1000 era más falsa que la otra: ella supone una ganancia de 900 coronas, contra una perdida de 90 coronas solamente para la estimación de 10. Los que preferían la media geométrica (Castelli y Galileé) defendían por el contrario que las dos estimaciones eran igualmente erróneas, ya que eran del orden de una multiplicación o una división por el mismo número 10.

De esta forma, la cuestión de la elección de la media sigue planteada. Los argumentos matemáticos están a favor de la media geométrica. Los argumentos económicos estarian más bien a favor de la media aritmética. En la práctica, se utiliza raras veces la media geométrica, pues todas sus cualidades matemáticas no compensan su grave defecto económico, que es el de no tener significado concreto (con relación a cantidades físicas, una cesta de la compra).

4. INDICES DE LASPEYRES Y DE PAASCHE

El párrafo precedente ha mostrado el interés económico de la media aritmética y de la media armónica, ya que éstas permiten comparar en tiempo presupuestos de consumo. Pero estos presupuestos seguían siendo imperfectos y sin relación con consumos reales; además, eran implícitos, y por consiguiente en general, desconocidos de los utilizadores. Los índices de Laspeyres y de Paasche son por el contrario índices ponderados explícitamente, lo que permite referirse a cestas de la compra próximas a la realidad que se describe: su valor económico es pues grande. Se utilizan desde luego mucho para

los cálculos de los índices nacionales en todos los países.

A. DEFINICION

a) Indice de Laspeyres

En el índice de Laspeyres intervienen ponderaciones fijas, dependiendo de la importancia observada de cada magnitud en el transcurso del año de base:

$$L_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n a_0^j x_i^j}{\sum_{j=1}^n a_0^j x_0^j} \times 100$$

Los a_0^j son coeficientes fijos, ligados a la época de base.

De este modo el índice de Laspeyres de los precios compara en el tiempo las variaciones de los precios de una cesta de la compra fija, es decir que describe año a año, la evolución del costo total de un conjunto concreto, bien definido y fijo de consumos (productos y servicios):

$$L_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n q_0^j p_i^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j p_0^j} \times 100$$

Siendo q_0^j la cantidad del artículo, j el año de base, p_i^j el precio de este artículo el mismo año y p_0^j el precio de este artículo el año de base.

Calculemos el índice de Laspeyres de los precios de los 3 primeros artículos de la tabla 5. En el índice de precios al consumo, se pueden elegir ponderaciones proporcionales a los puestos panadería, carne de buey y legumbres, lo que lleva a contar, por ejemplo, un pastel por varios kilos de pan o 1 kilo de costilla o una parte de un kilo de bistec ... Se obtiene a partir de las ponderaciones del índice de los 250 artículos válidos en 1960:

23 kg de pan; 87 kg de patatas y 2,3 kg de bistec:

El índice de Laspeyres es entonces:

$$L_{82/60} = \frac{23 \times 7,6 + 87 \times 4,15 + 2,3 \times 104,03}{23 \times 0,62 + 87 \times 0,32 + 2,3 \times 11,05} \times 100 = 1\ 148$$

Se puede escribir así la fórmula del índice de Laspeyres bajo la forma de una media aritmética de índices elementales:

$$L_{1/0} = 100 \times \frac{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j \frac{p_j}{p_0^j}}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j} = \sum_j \alpha_0^j L_{j/0}$$

con

$$\alpha_0^j = \frac{p_0^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j} \times 100 \text{ et: } \sum_j \alpha_0^j = 100$$

Los coeficientes L_0^j representan la parte relativa de cada producto en los gastos correspondientes a la cesta de la compra del año de base.

Bajo esta forma, ya no son las cantidades físicas relativas a cada producto los que intervienen, sino los valores correspondientes. De este modo, en el ejemplo precedente, las importaciones relativas, en porcentaje del bistec, de la costilla y del picadillo de caballo son (11):

1,1 para el pan; 41,2 para las patatas; 37,7 para el bistec.

Una segunda manera de calcular el índice de Laspeyres es efectuar una media ponderada de los índices elementales 82/60.

$$L_{82/60} = \frac{21,1 \times 1225,8 + 41,2 \times 1296,9 + 37,7 \times 941,4}{100} = 1148$$

El resultado es el mismo que antes salvo los errores de redondeo.

Los índices de precios al detalle se calculan a menudo mediante la fórmula de Laspeyres (por ejemplo en Francia hasta 1970) y también los índices de precios al por mayor.

Igualmente, existe un índice de Laspeyres de cantidades ponderado por precios fijos; de la relación de dos producciones o de dos gastos resultantes de cambios en las cantidades consumidas, si los precios hubieran sido los del año de base durante todo el período:

$$L_{1/0} = \frac{\sum_{j=1}^n p_0^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}$$

Lo cual se escribe incluso, poniendo en evidencia las importancias relativas de cada producto:

$$L_{1/0} = \frac{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j \frac{q_1^j}{q_0^j}}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}$$

Según la fórmula de Laspeyres se calculan muchos índices de cantidades, por ejemplo la mayoría de los índices de la producción industrial (las ponderaciones son los valores del año de base).

b) Índice de Paasche

El índice de Paasche se pondera mediante coeficientes que dependen esta vez del año corriente I:

$$P_{i/0} = \frac{\sum_{j=1}^n a_i^j x_i^j}{\sum_{j=1}^n a_i^j x_0^j} \times 100$$

Siendo los a_i^j coeficientes ligados al año corriente, para cada fecha en que este índice se calcula, los coeficientes son diferentes en general. El índice de precios de Paasche compara cestas de la compra variables con el año de cálculo. El costo de cada uno de estos presupuestos se relaciona con el costo del mismo presupuesto el año de base

$$P_{i/0} = \frac{\sum_{j=1}^n q_i^j p_i^j}{\sum_{j=1}^n q_i^j p_0^j} \times 100$$

(siendo q_i^j la cantidad del artículo j-ésimo que es consumido en la fecha I). Supongamos que las cantidades en 1982 de los tres productos de nuestro ejemplo sean: 37 kg de pan, 73 kg de patatas, 3,3 kg de bistec (estas cantidades han sido calculadas con ayuda del índice de precios al consumo con ponderaciones de 1982). El índice de Paasche, base 1960, para el año 1982, por lo tanto calculado con las cantidades de 1982, es:

$$P_{82/60} = \frac{37 \times 7,60 + 73 \times 4,15 + 3,3 \times 104,03}{37 \times 0,62 + 73 \times 0,32 + 3,3 \times 11,05} \times 100 = \\ = 1120,6$$

Resulta un índice de Paasche inferior en un 2% al índice de Laspeyres calculado con los mismos elementos. Esto se explica por el hecho de que la parte del bistec cuyo precio ha subido menos es mayor en 1982 que en 1960.

Hubieran podido dar en lugar de cantidades físicas las importancias relativas de cada producto el año corriente:

$$P_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j}{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j - \frac{p_o^j}{p_i^j}} \times 100$$

$$\frac{1}{P_{i/o}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j - \frac{1}{I_{i/o}^j}}{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j} = \sum_j \alpha_i^j \frac{1}{I_{i/o}^j}$$

El índice de Paasche se presenta como una media armónica ponderada de índices elementales, con coeficientes α_i^j calculados como por el índice de Laspeyres.

Volvamos al ejemplo de los tres productos alimenticios. Las ponderaciones de 1982 pueden ser calculadas como anteriormente las de 1960. Resultan: 27,7% para el pan; 28,2% para la patata y 44,1% para el bistec. Se puede calcular el índice de Paasche con ayuda de estas ponderaciones.

b) Igualmente se define un índice de Paasche de las cantidades:

$$P_{i/o} = \frac{\sum_{j=1}^n p_i^j q_i^j}{\sum_{j=1}^n p_i^j q_o^j}$$

Los valores de las cantidades son comparados a precios constantes, siendo los precios los del año corriente.

c) Índice de valor

Los índices sintéticos no tienen la propiedad de que el índice de una magnitud producto de otras dos sea igual al producto de los índices de estas otras dos magnitudes. Sin embargo, se puede definir un índice de valor:

$$V_{i/o} = L_{i/o}(p) \cdot P_{i/o}(q) = L_{i/o}(q) \cdot P_{i/o}(p)$$

designando por $L(p)$ y $L(q)$ los índices de Laspeyres de los precios y de las cantidades y por $P(p)$ y $P(q)$ los índices de Paasche de los precios y de las cantidades. En los dos casos:

$$V_{i/o} = \frac{\sum_j q_i^j p_i^j}{\sum_j q_o^j p_o^j}$$

es la relación de los valores el año de base y el año corriente.

B. VENTAJAS DE LOS INDICES DE LASPEYRES Y DE PAASCHE

1. Las dos fórmulas son simples y fáciles de comprender: poseen la propiedad de identidad.
2. Están perfectamente definidas.
3. Son sensibles.

4. Estas fórmulas pueden ser tratadas algebraicamente cuando están bajo la forma de medias de índices. Verifiquémoslo con el índice de Laspeyres base 1960 añadiendo a los tres artículos alimenticios (tabla 5), 14% de billetes de metro (representativos de gastos de transporte público). Si nos servimos del índice ya calculado podemos considerarlo como un único índice, de ponderación 100; se calcula la media ponderada de este índice y del índice del billete del metro:

$$L'_{82/60} = \frac{100 L_{82/60} + 14 \times 615,2}{100 + 14} \times 100 = 1082,6$$

Da lugar al mismo resultado que si se calcula directamente el índice de Laspeyres de los cuatro artículos. Resulta de ello que estos índices poseen la propiedad de agregación: El índice de Laspeyres de un conjunto de magnitudes es igual al índice de Laspeyres de los índices de Laspeyres de cada grupo de magnitudes: Ocurre lo mismo para los índices de Paasche. Esta propiedad es de una gran ventaja para los cálculos, pues la mayoría de los índices elaborados según estas fórmulas pueden ser publicados no solamente bajo la forma de índice global, si no también bajo la forma de índices de grupos y de subgrupos. A partir de índices de grupos y de subgrupos se puede calcular el índice global. Este es el caso en particular para los índices de precios (al por mayor y al por menor) y para el índice de la producción indus-

trial en Francia.

5. La ventaja esencial de estos índices es su significado económico:

El índice de Laspeyres compara en el tiempo sumas cuyas ponderaciones son fijas. Para tomar el ejemplo más usual de los índices de precios, el índice de Laspeyres puede seguir a través del tiempo las variaciones del costo de un presupuesto fijo.

Los índices de base antigua y de base reciente divergen a menudo en un periodo largo, en efecto, se trata siempre del costo de una cesta de la compra fija, pero esta cesta de la compra fija no es la misma en el caso de la base antigua que en el caso de la base reciente: el índice está construido sobre presupuestos de gastos concretos, efectivamente observados en el transcurso del año de base. Así, en el primer caso, se considera un homo economicus que ha mantenido los hábitos del periodo de base, por lo tanto con un consumo menos rico y menos variado que los hombres nacidos más tarde y que viven en una sociedad de nivel de vida más elevado. Se puede pensar que en el conjunto este presupuesto antiguo debe dar del costo de la vida una imagen más fuertemente creciente que un presupuesto reciente. En efecto, en el segundo caso, el homo economicus novus cuyo índice traduce las impresiones querrá, por el contrario, conocer lo que le hubiera costado su presupuesto reciente, rico y variado, en un periodo más antiguo: algunos artículos de consumo corriente en 1985 eran muy raros en 1850 y por lo tanto muy caros!. El coste de la vida parecerá pues haber subido mucho menos que en el primer caso.

En todo caso -y esto hará parecer las dificultades y los matices que se vuelven a encontrar sin cesar en tales razonamientos- puede ocurrir que se produzca lo contrario. En primer lugar, lo más frecuentemente topamos en el caso de presupuestos recientes, no con un alza relativa sino con ausencia total del precio de ciertos artículos en el pasado a menudo incluso con la inexistencia del artículo (frigoríficos, televisores, máquinas electrónicas); de este modo, el presupuesto antiguo puede estar compuesto de artículos tan poco influidos por el progreso técnico que ellos son hoy en día no muy baratos sino muy caros (rastrillos, zuecos, lámparas de aceite, pergaminos...); en este caso los productos nuevos en lugar de productos antiguos. Únicamente tales sustituciones podrían traducir en índice la realidad; pero estas son muy delicadas e incluso peligrosas de manejar.

Toda persona cuyo presupuesto es indexado sobre un in-

dice de Laspeyres puede en cada época adquirir el presupuesto que había elegido el año de base: mejor todavía puede por sustitución obtener consumos más elevados o que le parezcan preferibles.

- El índice de Paasche se refiere a cestas de la compra variables con el tiempo. Permite seguir la evolución de los consumos al mismo tiempo que la de los precios. Pero a veces es difícil distinguir en sus variaciones lo que se debe atribuir al cambio de la estructura de consumo y lo que se debe atribuir a los cambios de precios.

- La diferencia fundamental entre las series Laspeyres y las series Paasche se desprende del contenido físico de las cestas de la compra. Todo depende de la manera en la que el consumo del hogar evoluciones. Es pues difícil decir cuál de los dos índices tiene la variación más favorable para el consumidor:

Muy a menudo, una indexación sobre un índice de Laspeyres le será más favorable que una indexación sobre un índice de Paasche. En efecto (12) una indexación sobre índice de Laspeyres permite adquirir siempre las mismas cantidades de los mismos productos. Es verosímil a veces que el consumidor proceda a ciertas sustituciones en sus compras cuando sobrevengan variaciones en los precios relativos. La cesta que adquirirá así será más satisfactoria para él que la antigua. Por el contrario, indexación sobre un índice de Paasche le será menos favorable a menudo. Reproduzcamos aquí el diálogo entre el índice de Paasche y el ama de casa de M.P. Mouchez.

Si los índices hablaran, el índice de Paasche diría al ama de casa: Usted se queja del alza de precios, pero éstos no han aumentado tanto como usted cree, los precios eran ya elevados respecto de sus ingresos en la situación de base: ¡vea qué grande es mi denominador! a lo cual el ama de casa respondería oportunamente: los precios de las mercancías que yo adquiría no eran tan elevados como lo indica su denominador calculado en base a mis adquisiciones actuales; yo organizaba mi compra en función del sistema de precios que existía en aquella época y yo estaba, hechas las sustituciones, más satisfecha de lo que usted pudiera creer.

Demos un ejemplo particularmente favorable. Supongamos que calculamos los dos índices sobre la base 1900, fecha en la cual la electricidad, en el lugar de observación, había comenzado a poder ser distribuida. Supongamos aún que en 1920 el precio de la electricidad se hace menor que el de otros productos de iluminado. El presupuesto de los índices de Laspeyres basado en el consumo usual

en 1900, no contendrá la electricidad, sino, por ejemplo, el petróleo. Esto no impedirá al consumidor cuyos ingresos estén indexados según el índice de Laspeyres utilizar en 1920, la electricidad, lo que le permitirá bien aumentar su alumbrado, bien utilizar sus ingresos en otra cosa. Por el contrario, el índice de Paasche se calculará en 1920 sobre una cesta de la compra que comprende la electricidad; siendo ésta mucho más cara en 1900 que el petróleo, el índice de Paasche será por este motivo, menor que el de Laspeyres; los ingresos del consumidor interesado sobre un Paasche serán más pequeños que los ingresos indexados sobre un Laspeyre. El juego de sustituciones será desfavorable para el consumidor cuyos ingresos están indexados sobre el índice de Paasche ...

Pero esto no se produce siempre, ya que, como se ha dicho todo depende de las cestas de la compra. Supongamos que un índice de Laspeyres de base antigua, se calcula sobre un presupuesto bajado el pan relativamente más que los otros alimentos durante el periodo de estudio, el consumidor cuyos ingresos sigue el índice de Laspeyres no podría a penas sustituir el pan por otros artículos más deseables. Por el contrario la cesta del índice de Paasche comprenderá cada vez menos pan y cada vez más otros productos cuyo precio haya subido más. El consumidor cuyos ingresos sigan este índice podrá adquirir otros productos, más satisfactorios que el pan. En este caso, la indexación sobre el índice de Paasche será más favorable para el consumidor.

6. El cálculo del índice de Laspeyres es fácil una vez determinadas las ponderaciones. Esta determinación exige en general una encuesta difícil, pero esta no es necesaria más que para el año de base.

Por el contrario, para el índice de Paasche, hay que determinar los presupuestos de consumo cada año de cálculo, lo que es costoso y difícil. Prácticamente, es casi imposible reconstituir tales presupuestos para el pasado pero incluso para el presente. Es difícil estar seguro de que se sigue siempre el consumo del mismo tipo de hogar. A causa de esto, el índice de Paasche se emplea raras veces.

C. INCONVENIENTES DE LAS FÓRMULAS DE LASPEYRES Y DE PAASCHE

1. No tiene la propiedad de circularidad, y no son reversibles.

2. De ello se desprende que es imposible cambiar de

base sin rehacer todos los cálculos, esto constituye un inconveniente serio para los utilizadores.

En lo que se refiere al índice de Laspeyres se puede constatar que si se cambia de origen se obtiene un nuevo índice que puede ser también considerado como un índice de Laspeyres pero con ponderaciones diferentes de las de año de base, ponderaciones implícitas y a menudo inesperadas. Por ejemplo, un índice de base 1960, calculado con origen en 1950 puede ser considerado como un Laspeyres de base 1950 pero con ponderaciones que no tienen nada que ver con el consumo efectivo de 1950 (13).

Veamos, por ejemplo, lo que ocurre cuando el índice del coste de la vida es un índice de Laspeyres, base 1980 y se desea conocer la progresión del coste de la vida de 1982 a 1983. Los índices de Laspeyres son:

$$L_{2/0} = \frac{\sum_j q_0^j p_2^j}{\sum_j q_0^j p_0^j} \times 100$$

$$L_{3/0} = \frac{\sum_j q_0^j p_3^j}{\sum_j q_0^j p_0^j} \times 100$$

y se calcula el índice sobre origen 1982 (en deslizamiento):

$$100 \frac{L_{3/0}}{L_{2/0}} = \frac{\sum_j q_0^j p_3^j}{\sum_j q_0^j p_2^j} \times 100 = \frac{\frac{\sum_j q_0^j p_3^j}{\sum_j q_0^j p_0^j} \times 100}{\frac{\sum_j q_0^j p_2^j}{\sum_j q_0^j p_0^j} \times 100}$$

Se trata de un nuevo índice de Laspeyres de base 1982, en esta ocasión, cuyas ponderaciones son $q_0^j p_2^j$, es decir coeficientes presupuestarios cuyas cantidades son las de la antigua base y los precios los del nuevo origen. Todo ocurre como si el índice de Laspeyres tuviera en cuenta automáticamente la deformación que los movimientos de precios han hecho sufrir a las ponderaciones del año precedente (14).

3. Tanto para una de las fórmulas como para la otra, se plantea un problema cuando se quiere calcular un índice en un período largo: Habría que tener dos series de precios seguidas en todo este período. En efecto ya se trate de un Paasche como de un Laspeyres es necesario que

los mismos artículos figuren en el numerador (precio del año corriente) y el denominador (precio del año de base). En la práctica esto es difícil e incluso imposible a veces pues algunos artículos no aparecen más que a partir de una cierta fecha (Kilowatio/hora de electricidad, frigorífico, magnetoscopio ...) otros por el contrario desaparecen del uso corriente (lámparas de aceite, zuecos ...). Por lo tanto se procede lo más a menudo a sustituciones de artículos: reemplazar el aceite de las lámparas por electricidad o inversamente; pero la equivalencia no es simple de hacer. Nos contentamos entonces en general con registrar las desapariciones y sea calcular ciertos años índices que corresponde a un número menor de artículos o sea reconstituir la ponderación atribuyendo a los artículos conocidos de un grupo o de un subgrupo las ponderaciones del conjunto de este grupo o de este subgrupo (artículos desconocidos o desaparecidos incluidos). Este último método te lleva a suponer que los artículos desconocidos hubieran visto evolucionar su precio como el grupo o el subgrupo de los que forman parte.

4. El índice de Paasche tiene el defecto de necesitar el conocimiento de presupuestos de consumo para cada año de cálculo.

D. RELACIONES ENTRE LOS INDICES DE LASPEYRES Y DE PAASCHE

1. Es frecuente que el índice de Paasche sea inferior al índice de Laspeyres.

2. Ninguna de las dos fórmulas es reversible.

Sin embargo se puede señalar que:

$$P_{i/o} = \frac{1}{L_{o/i}}$$

3. Las medias aritméticas y armónicas son casos particulares de los índices de Laspeyres y de Paasche.

Hemos constatado que el índice de Laspeyres es una media aritmética ponderada de índices elementales y que el índice de Paasche es una media armónica ponderada de índices elementales. Podemos pues considerar los índices media aritmética y media armónica simple como casos particulares de los índices de Laspeyres y de Paasche en el caso en que los coeficientes de ponderación sean iguales a 1.

De todas maneras, para comprender el significado de un índice, conviene interesarse siempre de las pondera-

ciones.

4. Práctica de estos índices.

En la práctica, el índice de Laspeyres es con mucho el más frecuentemente utilizado tanto como índice de precios como índice de cantidad. Los índices de Paasche son utilizados también a menudo. Los de Edgeworth, Fisher y Sidgwick que son índices deducidos de estos que acabamos de describir no se encuentran casi nunca. No son tanto las consideraciones teóricas que valen tanto para el Paasche como para el Laspeyres como razones prácticas las que explican este estado de cosas.

El significado económico del índice de Laspeyres, es decir, la fijeza de su presupuesto de referencia, de su cesta de la compra, hacen de él un índice sintético válido. Sin embargo, su no circularidad acarrea un inconveniente grave, es imposible hacer un empalme exacto entre dos índices de Laspeyres de bases diferentes. En la práctica, tales empalmes se realizan sin embargo, pues la base de este índice envejece bastante rápido y nos vemos obligados a cambiarlos frecuentemente: al cabo de un cierto tiempo el presupuesto de base no corresponde ya al consumo observado para el año corriente. Los empalmes efectuados de esta manera acarrean errores que trataremos más adelante.

5. CAMBIOS DE ORIGEN. EMPALMES DE INDICES

Los índices más frecuentemente calculados son los índices de Laspeyres. Para evitar el envejecimiento de las bases, los estadísticos se ven obligados a cambiar bastante a menudo de índices; a cada cambio de índice, elige una nueva base por lo tanto un sistema de ponderaciones nuevo. Nos encontramos ante el problema siguiente: ¿Cómo comparar períodos entre los cuales no haya sido calculado índice seguido, sino que por lo contrario dos o varios índices de bases diferentes? La solución práctica es hacer empalmes entre estos índices sintéticos. Pero este procedimiento conduce a resultados insostenibles desde el punto de vista teórico. Vamos a ver en este capítulo el alcance del error así cometido. Antes de nada no hay más remedio que reflexionar sobre los cambios de origen.

Para comprender bien este capítulo conviene repasar la distinción que se ha hecho ya entre base y origen. La base se escoge para efectuar el cálculo; los índices elementales son referidos a 100 para la base y los cálculos se llevan a partir de esa base. El índice sintético vale pues 100 para la base y sus otros valores se calculan en función de ella. Pero ocurre que el utilizador encuentra

más cómodo transformar el índice sintético así obtenido, por simple regla de tres, en un índice que vale 100 en otro periodo (o para otro lugar). Se dice entonces que este nuevo periodo (o este nuevo lugar) es el origen del índice sintético así transformado. Este índice tiene siempre la misma base pero ésta no es ya aparente.

A. LOS CAMBIOS DE ORIGEN

No se plantea ningún problema en lo que se refiere a índices reversibles (media geométrica): cada vez que se cambia de origen, se obtiene un índice que es idéntico al que hubiera sido obtenido con aquella fecha de origen para base.

Por el contrario, los índices de tipo aritmético, Laspeyres y Paasche, no son reversibles y no tienen esta propiedad. Normalmente, no se debería pues presentarnos nunca más que con relación a su base. Pues, en la práctica, es a menudo útil poder comparar índices entre ellos o simplemente conocer el crecimiento de un índice entre dos años (1 y 2) de los cuales ninguno es el año de base (0). Se procede entonces a un cambio de origen; calculando:

$$\frac{I_{2/0}}{I_{1/0}} \times 100 \quad (a)$$

Se obtiene un índice que tiene como origen el año 1.

Esta clase de cálculo es prácticamente inevitable, pero no hay que perder de vista que no se encontraría el mismo resultado si se calculase un índice que tuviese como base el año 1: El índice (a) de origen 1 sigue siendo de base 0, y no es el mismo que un índice de la misma ponderación y de base 1.

He aquí un ejemplo clásico de W.C. Mitchell (15):

TABLA 8
Precio en dólares por cíntemán

Producto	1913	1914
Trigo	1,00	0,50
Mazf	0,40	0,40

TABLA 9**Índices (media aritmética simple)**

Indice	1913	1914
Base 1913	100	75
{ Base 1913		
{ Origen 1914	133,3	100
Base 1914	150	100

Se hallan resultados sensiblemente diferentes: 133,3 y 150.

El índice, según la fórmula empleada, ha subido en un 33% o en un 50% de 1913 a 1914 sin que se pueda decir cuál de ellos es el método mejor.

De estos hechos se deben deducir las conclusiones siguientes que son de primera importancia:

- No hay que asimilar nunca los resultados de un cambio de origen a los de un cambio de base; cambiando el origen, no se obtiene de ninguna manera un índice que tuviera como base el nuevo origen. Inversamente, un índice de Paasche o un índice de Laspeyres (o una media aritméticamente simple) no tiene y no puede tener más que un sólo año de base.

- En lo que se refiere únicamente al índice de Laspeyres, digamos que si se cambia de origen se obtiene un nuevo índice de Laspeyres que tiene como base el nuevo origen, pero con ponderaciones diferentes. Cambiar el origen sin cambiar el origen sin cambiar las ponderaciones que sirven para el cálculo es pues, cambiar la cesta de la compra que sirve de referencia; muchos utilizadores lo hacen sin saberlo, y trabajan así sobre una nueva cesta de la compra cuya composición es ignorada y a menudo barroca, creyendo trabajar sobre la antigua.

Señalemos en particular que se hace implícitamente un cambio de origen cuando se afirma que un índice ha aumentado en un tanto por cien desde hace un mes. Se toma en efecto como origen la fecha anterior en un mes o en un año. Se dice que se opera en deslizamiento, es posible calcular las ponderaciones que tendría el índice sobre base este origen si se trata de un Laspeyres.

B. LOS EMPALMES DE INDICES

a) Definición

Lo mismo que para los cambios de origen, el problema de los empalmes se plantea únicamente para los índices no reversibles (medias aritméticas o armónicas, Laspeyres y Paasche, ...).

Supongamos que se tenga un índice I entre la fecha 0 y la fecha 1, y un segundo índice I' a partir de la fecha 1. Ocurre muy a menudo que los utilizadores experimentan la necesidad de comparar el nivel de la magnitud compleja entre la fecha 0 y una fecha 2 posterior a 1. Ninguno de los dos índices sucesivamente calculados permiten unir directamente las fechas 0 y 2. Por lo tanto es una gran tentación la de empalmar los dos índices con un cálculo cuya facilidad disimula el carácter equivocado.

$$\frac{1}{100} I_{1/0} I'_{2/1} \quad (16)$$

Este cálculo no sería necesario si fuera posible calcular el índice I en la fecha 0 o el índice I' en la fecha 2: pero ocurre bastante frecuentemente que esto no es posible, pues numerosos artículos no existen de manera continua entre 0 y 2 (ejemplo, las velas y la electricidad entre 1880 y 1985): a veces, más simplemente, no se dispone de tomas de magnitudes que se observan (precios, cantidades...) en el periodo 0, 2, o de desea poner al día las ponderaciones cada año.

Por ejemplo, sean dos productos cuyos índices serán en la tabla siguiente (los suponemos conocidos en todo el periodo para facilitar las comparaciones): los índices sintéticos son medias aritméticas simples ...

TABLA 10
Empalmes de índices

Fechas	a	b	Cálculo directo base 0	I (base 0)	I' (base 1)	Empalme
0	100	100	100	100		100
1	150	80	115	115	100	115
2	200	60	130		104,2	120

Se calcula el índice empalmado del año 2 por medio de $115 \times 104,2/100 = 120$.

Los resultados del cálculo directo y del cálculo por empalme difieren sensiblemente para el año 2: 130 y 120.

b) Legitimidad

Las consideraciones teóricas y el ejemplo numérico que preceden muestran que los empalmes de índices no circulares no son legítimos.

No hay que perder pues de vista que encadenando uno o varios índices no se obtiene un índice de la misma fórmula: se obtiene solamente lo que se ha calculado, es decir, un índice sui generis, que no puede definirse más que por su propio cálculo; es y no puede ser más que un encadenamiento de varios índices y cualquier otro cálculo daría otro índice completamente distinto. En su uso no puede ser proscrito totalmente, pero es necesario que los usuarios se den cuenta perfectamente de lo que son.

Desde luego hay que tener cuidado de empalmar índices diferentes en su concepción: Un índice de precios al por mayor y un índice de precios al por menor, o incluso dos índices de producción industrial cuyas ponderaciones no han sido calculadas de acuerdo con el mismo concepto, o índices de dos países diferentes o de dos ciudades ...

c) Otros empalmes

Hasta aquí nos hemos limitado al caso en el que hay un sólo año de empalme y ha sido designado por 1. Se pueden hacer empalmes un poco más complejos si los dos índices han sido calculados simultáneamente en un periodo un poco largo: en lugar de utilizar un sólo año de empalme se puede tomar todo este periodo como periodo de empalme y calcular el índice empalmado utilizando la relación media entre los dos índices. Este procedimiento permite obtener un resultado más riguroso. Al mismo tiempo, por observación del periodo común a los dos índices, se puede ver si el empalme tiene sentido: Si los dos índices tienen una evolución más o menos paralela pueden ser encadenados, si no, se juzgará que más vale evitar el empalme.

d) Conclusión

Dadas las dificultades que hay para calcular un verdadero Laspeyres o un verdadero Paasche en un periodo largo (envejecimiento de la base, desaparición de ciertos elementos ...), parece que el único índice posible de calcular es un índice empalmado, y quizás el menos malo de los

que pueden ser calculados en un periodo largo. No hay que perder de vista sin embargo el carácter artificial de este índice y por consiguiente no concederle el significado que no tiene.

6. INDICES CADENA

Los índices estudiados en los párrafos que preceden, particularmente los de Laspeyres y Paasche, son a menudo los mejores para hacer un estudio a corto plazo. Por el contrario, si se trata de hacer comparaciones a largo plazo, tales índices no son ya satisfactorios:

- Las ponderaciones (Laspeyres) envejecen y no corresponden ya a la situación actual. (Para un índice de precios: la estructura de consumos ha cambiado).

- La base se aleja, los elementos elegidos en la época de base no son ya los que convienen mejor (para un índice de precios, nuevos productos han sido introducidos, tales como la televisión en color o el magnetoscopio, productos que no existían en la época de base, si ésta es anterior a 1970, por lo que hay una imposibilidad de calcular el gasto del año de base).

Por este motivo los estadísticos han propuesto cambiar de base cada vez que se hace un nuevo cálculo del índice, o en todo caso en fechas próximas y regulares. Se obtiene así una serie de índices $C_{3/2}$, $C_{2/1}$, $C_{1/0}$... considerados como eslabones (o anillos) sucesivos del índice cadena obtenido haciendo su producto.

$$C_{3/0} = C_{3/2} \cdot C_{2/1} \cdot C_{1/0}$$

Cada eslabón se calcula según una fórmula de Laspeyres o de Paasche o más simplemente según una media aritmética simple de índices. El índice cadena es pues una generalización del empalme de índices.

A. CALCULO

a) Índice de cantidades, ponderado

Ejemplo: Calcular el índice cadena de la producción de hierro, fundición y acero. Se dan los precios por toneladas y las cantidades producidas en toneladas:

TABLA 11
Producción industrial

Product	Año 0		Año 1		Año 2	
	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Hierro	100	1 200	110	1 000	120	800
Fundición	80	2 300	90	2 500	100	2 600
Acero	200	5 000	210	5 300	250	5 300

Se calculan los dos eslabones como índices de Laspeyres de las cantidades ponderadas por los precios. El primer eslabón tiene como base el año 0:

$$C_{1/0} = \frac{100 \cdot 100 \times 1000 + 80 \times 2500 + 200 \times 5300}{100 \times 1200 + 80 \times 2300 + 200 \times 5000} = 104,3$$

El segundo eslabón tiene como base el año 1.

$$C_{2/1} = \frac{100 \cdot 110 \times 800 + 90 \times 2600 + 210 \times 5300}{110 \times 1000 + 90 \times 2500 + 210 \times 5000} = 99,1$$

El índice cadena vale pues 100 el año 0; 104,3 el año 1 y el año 2:

$$C_{2/0} = \frac{1}{100} C_{2/1} \times C_{1/0} = 103,4$$

b) Índice de precios no ponderados explícitamente

Sean dos productos a y b de los que se conocen los índices elementales de precios base t_0 en las fechas t_0 , t_1 , t_2 :

TABLA 12
Índices elementales

Fecha	a	b
t_0	100	100
t_1	100	150
t_2	98	108

Calculemos por una parte la media aritmética A (índice de base fija) y por otra parte el índice cadena para dos eslabones $C_{1/0}$ y $C_{2/1}$.

TABLA 13
Cálculo del índice de cadena

Fecha	A	$C_{1/0}$	$i_{2/1}$		$C_{2/1}$	$C_{2/0}$
			a	b		
t_0	100	100				100
t_1	125	125	100	100	100	125
t_2	103		98	72	85	106

Expliquemos los cálculos. El eslabón $C_{1/0}$ es idéntico a la media aritmética. Para obtener el 2º eslabón se calculan los índices elementales $i_{2/1}$ base 100 en t_1 ; a continuación se calcula la media aritmética simple de estos dos índices elementales: $C_{2/1}$.

El índice cadena $C_{2/0}$ se obtiene encadenando los dos índices $C_{1/0}$ y $C_{2/1}$: es idéntico a A para t_0 y t_1 . En t_2 :

$$C_{2/0} = C_{2/1} \cdot C_{1/0} = \frac{85 \times 125}{100} = 106$$

B. VENTAJAS E INCONVENIENTES

El índice cadena posee por definición, la propiedad de circularidad. Por lo tanto siempre se pueden empalmar índices cadena con tal de que tengan la misma definición.

Cada eslabón de la cadena es una representación válida de la situación en un período con relación más próximo. Pero las dificultades aparecen cuando se encadenan los eslabones:

- Todo error en uno de los eslabones de la cadena se deja sentir en todos los índices siguientes (17).

- El cálculo es más largo que para los índices de base fija ya que hay que construir un nuevo índice para cada eslabón. A esta dificultad se añade la necesidad de calcular todas las fechas intermedias.

- Sobre todo, un índice de estos a largo plazo, tiene el riesgo de no obtener significado económico: el valor económico de cada eslabón desaparece desde que los ani-

llos están en cadena. Anteriormente, en el segundo ejemplo el resultado obtenido era 106 para el índice cadena y 103 para un índice de base fija. La diferencia, sensible, se explica porque el presupuesto de referencia varía de un eslabón a otro.

En un período bastante largo, se llega rápido a hacer decir cualquier cosa a índices cadena, pues la falta de significado económico se hace cada vez más grave cuando el número de eslabones aumenta. De esta forma (18), calculando un índice de precios en el período 1840-1954, hemos obtenido resultados asombrosos en lo que se refiere a los índices cadena.

Los índices que se han representado en la tabla 14 han sido calculados sobre cerca de 200 artículos de año en año, de 1840 a 1954. No damos aquí más que tres años de resultados, siendo el año de base 1952. Se han calculado dos índices cadena no ponderados con eslabones cada año: el que está indicado por 1840-1954 se caracteriza por eslabones cuya base es siempre el año precedente; el que se llama 1954-1840 se caracteriza por eslabones cuya base es siempre el año siguiente (esto nos llevaría otra vez a una media armónica de base el año precedente). El índice cadena ponderado tiene eslabones de alrededor de 20 años. Para facilitar las comparaciones se presenta igualmente un índice de Laspeyres base 1952. Se había calculado igualmente un índice de media aritmética simple: sus valores eran próximos a los del índice de Laspeyres; las divergencias importantes constatadas no son imputables al hecho de que ciertos índices sean ponderados y otros no.

TABLA 14
Índices cadena en un período largo (1840-1954)

Índice	1840	1900	1952
Índice cadena no ponderado de año en año (1840-1954)	250	302	100 000
Índice cadena ponderado en períodos de 20 años aprox. (1840-1954)	391	-	100 000
Índice cadena no ponderado de año en año (1954-1840)	2 032	1 373	100 000
Laspeyres, base 1952	611	680	100 000

Se ve que entre 250 y 2.032 en 1840, muchos resultados son posibles y legítimos desde el punto de vista puramente estadístico; pues, se trata de saber por cuánto ha sido multiplicado el costo de la vida de 1840 a 1954: 400, 250 o 49 (se han calculado divergencias menos importantes pero sensibles entre los índices de Laspeyres y de Paasche en este mismo periodo. No existe respuesta precisa a la cuestión: ¿Por cuánto ha sido multiplicado el costo de la vida de 1840 a 1954?).

C. ESTUDIO DE LAS DIVERGENCIAS DEBIDAS AL SENTIDO DEL CALCULO (MEDIAS SIMPLES)

Se constata que si la base elegida es el periodo precedente o el periodo siguiente, los resultados son muy diferentes (el ejemplo anterior: 250 o 2.032 en 1840).

Si se toma como base el año precedente (sentido normal del tiempo), se calcula para cada índice la media aritmética simple (o ponderada) de los índices elementales, base cien el año precedente. Por el contrario si se toma como base el año siguiente (*remontando el tiempo*), se calcula la media armónica de los mismos índices elementales. Ya que la media aritmética es siempre superior a la media armónica resulta que para cada año de la cadena el índice en el sentido normal del tiempo es mayor que el que se ha calculado remontando el tiempo. Cuando se multiplican los eslabones unos con otros es claro que las divergencias se acentúan.

Se puede dar de este resultado una explicación más concreta y más intuitiva tomando el ejemplo de los índices de precios. Supongamos que el precio de un producto sube del año 0 al año 1: calculando un índice de base el año 1 con relación a 0 se considera una cierta cantidad de este producto, la que costaba cien francos el año 0. Para calcular el índice del año 0 con relación al año 1, se considera la cantidad de este producto que valía cien francos el año 1: es menor que la precedente, ya que por hipótesis el precio ha subido. En el índice 0/1 interviene pues una cantidad física menor del producto que ha subido que en el índice 1/0: este último sube pues, más que el primero.

Se puede hacer un razonamiento análogo considerando un producto que baja entre 0 y 1: La cantidad física de este producto que interviene en la cesta de la compra del índice 0/1 es mayor que en el índice 1/0. Su baja tiene por lo tanto más influencia sobre el índice 0/1 que sobre el índice 1/0.

En los dos casos, el índice 1/0 es mayor que el índice 0/1: acentúa el alza y disminuye la baja de los artí-

culos.

D. COMPARACIONES DE LOS INDICES CADENA Y DE LOS INDICES DE BASE FIJA

Queda por explicar la divergencia entre los índices cadena y los índices de base fija. Algunos ejemplos un poco caricaturescos permitirán ver su importancia:

TABLA 15
Índice cadena - primer ejemplo

Fecha	Artículo a	Artículo b	Media aritmética	Índice cadena
t_0	100	100	100	100
t_1	100	200	150	150
t_2	100	100	100	112,5

Las situaciones 0 y 2 son idénticas: pues el índice cadena indica un alza de 12,5%. Igualmente:

TABLA 16
Índice cadena - segundo ejemplo

t_0	100	100	100	100
t_1	100	60	80	80
t_2	100	100	100	106,67

Resulta un alza de 6,6% para dos situaciones observadas idénticas.

TABLA 17
Índice cadena - tercer ejemplo

t_0	100	100	100	100
t_1	125	75	100	100
t_2	150	50	100	93,33

El índice de base fija no ha cambiado, mientras que el índice cadena baja.

Se podrían multiplicar tales ejemplos. Hay que investigar la explicación de este comportamiento inquietante.

tante del índice cadena, considerando las cantidades físicas de cada producto que intervienen en el índice.

Consideremos un producto cuyo precio sube entre las fechas 0 y 1. En la fecha 0, una cierta cantidad de este producto valía 100 F. En la fecha 1, una cantidad menor vale 100 F. ¿Qué pasa entonces entre 1 y 2?

- La cesta de la compra del índice de base fija contiene siempre 100 F del producto en la fecha 0.

- En el índice cadena, interviene una cantidad menor.

Si mientras el precio del producto continúa subiendo entre 1 y 2, el índice de base fija sube más por la causa de este producto que el índice cadena, si el producto baja entre 1 y 2, el índice de base fija baja más que el índice cadena.

Igualmente, si el precio de un producto baja entre 0 y 1 en la fecha 1 el presupuesto del índice de base fija contiene una cantidad física menor de este producto que el del índice cadena. Por lo tanto si este producto continúa bajando entre 1 y 2, hace bajar al índice cadena más que el índice de base fija. Si sube le hace subir más que el índice de base fija. (19)

Estas afirmaciones bastan para explicar los dos primeros ejemplos:

- En el ejemplo 1, el artículo b ha subido entre 0 y 1 de 100 a 200. El segundo eslabón del índice cadena hace intervenir la mitad menos de b que el primer eslabón o la media aritmética. Por consiguiente, la base de b entre 1 y 2 afecta más a la media aritmética que el índice cadena que resulta así paradojicamente superior a 100.

- En el ejemplo dos, el artículo b ha bajado y después ha subido. Hay pues un peso mayor en el índice cadena que en el índice de base fija. El índice cadena sube pues más arriba que 100.

El ejemplo 3 es más complejo, ya que los dos artículos han variado al mismo tiempo. El artículo ha subido, después sube aún, lo que tiene tendencia a hacer subir a la media aritmética más que el índice cadena. El artículo b baja, después baja todavía lo que hace bajar al índice cadena más que al índice de base fija. Las evoluciones de precios de los dos productos se compensan: La media aritmética sigue siendo fija, pero el índice cade-

na que debe ser inferior que ella, por el hecho de que ninguno de los dos artículos baje.

La mayoría de los índices sintéticos hacen intervenir a más de dos artículos. La explicación de los resultados dados por los índices cadena es pues muy delicada y a menudo en el estado actual de las investigaciones teóricas sigue siendo poco satisfactorio.

E. EJEMPLO DE LOS PRECIOS DE LOS PRODUCTOS ENERGETICOS EN FRANCIA

Se dan algunos resultados referentes al índice del costo de la vida en Francia en 1982, base 1970 para los productos energéticos, productos cuyo precio ha variado el que más en Francia en el periodo reciente. (Tabla 18).

Para calcular el índice de Laspeyres de base 1970, se utilizan las ponderaciones de 1970, y se obtiene en 1982:

$$L_{82/70} = \frac{69 \times 540,4 + 50 \times 1106,6 + \dots}{525} = 472,2$$

Para calcular el índice de Paasche, se utilizan las ponderaciones 1982:

$$\frac{1}{P_{82/70}} = \frac{\frac{23}{540,4} + \frac{227}{1106,6} + \dots}{1032} = \frac{2,32}{1032}$$

$$\text{y } P_{82/70} = 445$$

El índice 457,4 que figura en la tabla es un índice cadena; vale alrededor de 15 puntos menos que el índice de Laspeyres y 12 puntos más que el índice de Paasche.

Hay pues una diferencia entre los índices de base fija y el índice cadena. El índice cadena se sitúa entre el índice de Laspeyres y el índice de Paasche, lo que es muy interesante (se produce frecuentemente). Las diferencias son relativamente débiles, incluso para los productos energéticos cuyos precios han variado mucho desde 1970 a 1982. Serían aún menores si los precios hubieran variado menos. El cálculo por índices cadena se justifica pues en el caso del índice del costo de la vida en Francia, en razón de las ventajas que hemos indicado (se notará en particular que la ponderación ha variado mucho en el periodo).

TABLA 18
Indice del costo de la vida en Francia
(productos energéticos)

Productos	Ponderación 1970	Ponderación 1982	Indice 1982 base 1970
Carbones	69	23	540,4
Fueles	50	227	1 106,6
Gasolina	188	437	389,9
Gas Ciudad	65	118	417,5
Electricidad	112	189	324,8
Otros	<u>41</u>	<u>38</u>	<u>450,1</u>
Total	525	1 032	457,4

F. CONCLUSION

La cuestión de los índices-cadena es compleja: los cambios de ponderaciones de cada artículo juegan en ellos un papel preponderante. En el límite sería posible hacer decir cualquier cosa a los índices-cadena, por ejemplo eligiendo convenientemente las fechas de cambio de base y haciendo que sean suficientemente numerosas.

Se puede ser un poco menos pesimista en lo que se refiere a los índices-cadena ponderados, cuya ponderación cambia para cada año (ver el ejemplo de E). El estudio de tales índices está aún en estado embrionario y las conclusiones son delicadas. Es evidente que más aún que para los índices-cadena considerados aquí, cada eslabón es un índice válido. Pero aunque no se puede atribuir incluso en este caso un significado económico al índice obtenido encadenándolos la diferencia relativamente débil observada en E) entre el índice-cadena y los índices de base fija en un período ya largo (12 años) justifica, en todo caso, el uso que un cierto número de países hacen de esta fórmula para el cálculo de su índice de precios al consumo.

Cualquiera que sea su forma, el índice-cadena no tiene si no poco sentido económico en un período largo. Pero no se puede proscribir totalmente su uso pues estamos obligados por lo menos a hacer empalmes de índices. Además, cada eslabón de la cadena constituye en sí mismo un índice seductor: Haría falta calcular eslabones pero evitando cuidadosamente encadenarlos. Esto es prácticamente imposible. Queda la elección entre dos soluciones de las cuales ninguna es perfecta:

- Calcular índices de base fija (Laspeyres o Paasche). Pero estamos obligados a no calcularlos más que en períodos bastante cortos para que la base no envejezca demasiado pronto.

- Calcular índices-cadena, con, por ejemplo, cambio de base cada año. Se tiene una mejor evaluación a corto plazo, pero se está obligado a encadenar los eslabones para conocer las variaciones en un período largo.

7. OTROS INDICES

Reunimos aquí algunas fórmulas de índices que tienen una importancia bien teórica, bien práctica y que es bueno conocer.

Hacíamos notar antes lo deseable que sería introducir en el uso corriente la noción de índice doble: En lugar de representar mediante un sólo índice sintético las variaciones de un conjunto de índices elementales se tendrían dos índices entre los cuales se situaría la evolución buscada.

Estos dos índices podrían ser los dos índices extremos, el que ha subido más y el que ha subido menos. Este índice doble constituye el intervalo de variación; por el contrario, constituye un criterio de juicio: no hay ningún índice sintético que pueda resultar válido fuera de éste.

Se podría pensar igualmente, a modo de índice doble, en el primer y tercer cuartil o bien en el primer y tercer decil.

A. EL INDICE VERDADERO DEL COSTO DE LA VIDA

a) Definición

Este índice es puramente teórico. Parece sin embargo importante hacer alusión a él en este curso pues representa lo que buscan los económistas (e inconscientemente todos los hombres) cuando calculan o utilizan un índice del costo de la vida.

Este índice se basa en la teoría del comportamiento racional del consumidor que debe ser resumida rápidamente aquí (20). Se supone que todo consumidor tiene una noción de utilidad (representada por una función) que le permite elegir entre dos objetos aquel que le es más útil.

Existe un cierto número de presupuestos que para él tienen la misma utilidad: Estos presupuestos forman lo que se llama *superficie de indiferencia* (en el espacio puramente teórico de las cantidades: espacio que tiene tantas dimensiones como productos existen). A partir de esta teoría, se definen dos índices:

- El verdadero índice del costo de la vida I. En este índice figuran en el numerador (fecha 1) y en el denominador (fecha 0) las sumas de dinero que permiten al consumidor adquirir una cesta de la compra, gracias a la cual conserva el nivel de utilidad que tenía en la fecha 0.

- El índice recíproco del costo de la vida J. Se mide con una razón análoga, pero esta vez, el nivel de utilidad es el de la fecha 1.

b) Fórmulas que permiten teóricamente aproximarse al índice verdadero

Se demuestra que el índice de Laspeyres es superior al índice verdadero del costo de la vida, y que el índice de Paasche es inferior al índice recíproco del costo de la vida. Los índices I y J son, repitámoslo, puramente teóricos: no pueden pues ser calculados. Los índices de Paasche y de Laspeyres constituyen índices calculables entre los cuales I y J se sitúan muy a menudo. En efecto según lo que acaba de decir:

$$L \geq I \quad P \leq J$$

Si I y J son próximos, lo que se produce a menudo, por lo menos en períodos cortos, se tiene:

$$P \leq I, \quad J \leq L$$

- Otras dos fórmulas permiten llegar a un valor próximo del índice verdadero, una es la fórmula ya clásica de Fisher:

$$F = \sqrt{L \cdot P}$$

que tiene la ventaja de ser un índice reversible y circular. El otro es el de Törnqvist: el índice T de Törnqvist es tal que:

$$\ln T = \sum_j \bar{w}_j \ln \frac{p_j^i}{p_j^0}$$

Las ponderaciones \bar{w}_j son las medias aritméticas de las ponderaciones Laspeyres y Paasche:

$$\bar{w}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{p_i^j p_i^j}{\sum_j p_i^j q_i^j} + \frac{p_0^j q_0^j}{\sum_j p_0^j q_0^j} \right)$$

- De forma general, existen muchos índices teóricos. La teoría de los índices está muy avanzada sobre la práctica, pero también está demasiado alejada de ella.

c) Conclusión

La noción económica de índice verdadero del costo de la vida supone la existencia de un consumidor medio; supone también que este consumidor medio tiene preferencias de las que se pueden conocer por lo menos aproximaciones. Estas hipótesis, aunque cómodas, son discutibles. Nos parece preferible utilizar índices realmente calculables, por los cuales no se pretende estimar el costo de la vida en general sino la evolución del poder de compra de una categoría bien determinada, sobre la base de sus consumos de un año determinado (sea el año de base o el año corriente).

B. INDICES Y METODOS UTILIZADOS PARA LAS COMPARACIONES INTERNACIONALES

a) Métodos ya presentados en esta obra

Las comparaciones entre naciones, en principio, no son diferentes de las comparaciones entre épocas. Se pueden pues aplicar los métodos ya indicados.

Se elige uno de los países como base y se calcula sea un índice de Laspeyres, sea un índice de Paasche. Esto permite, teóricamente, comparar en el espacio precios o cantidades, utilizando las fórmulas que han sido presentadas anteriormente para las comparaciones en el tiempo.

Este método sin embargo, tiene inconvenientes más importantes en el espacio que en el tiempo: la hipótesis según la cual la estructura de precios o de la producción cambia lentamente con el tiempo en un sólo país no puede ser puesta de manera justificable para comparaciones entre países (21). Las divergencias entre los índices de Paasche y de Laspeyres, ya sensibles para las comparaciones en el

tiempo, corren el riesgo de hacerse importantes.

Se pueden comparar también los crecimientos de los índices calculados en países diferentes; por ejemplo, el crecimiento de la producción industrial.

Pero (22) toda comparación de índices no puede hacerse más que con fórmulas y convenios idénticos. Las comparaciones de la expansión o de la inflación entre países son muy delicadas, a pesar de esfuerzos apreciables, las prácticas estadísticas de diferentes países siguen siendo muy diferentes.

b) Otros métodos

Los organismos internacionales que desean comparar agregados como el producto interior bruto (P.I.B.) utilizan bastante a menudo las tasas de cambio oficiales y convierten los precios nacionales en una moneda única (por ejemplo, el dólar de los Estados Unidos). Entonces se pueden calcular índices pero éstos no son necesariamente circulares, es decir que la comparación entre los países A y B, después entre B y C no es forzosamente coherente con la comparación A y C (23). Más grave, la tasa de cambio oficial resulta de una decisión política: no traduce forzosamente la realidad; todo el mundo sabe que en ciertos períodos la tasa de cambio hace la vida cara o por el contrario barata para los extranjeros de un país que van a otro.

Para remediar los defectos de las tasas de cambio existen dos clases de métodos.

- El que consiste en calcular las ponderaciones teniendo en cuenta todos los precios practicados en los diferentes países; el más conocido de estos métodos es el de Geary y Khamis (24).

- El de los precios reales o precios salariales, preconizado por Jean Fourastié (25) que consiste en expresar los precios en cada país, no en moneda del país sino en salario horario del obrero. Si en un país una mesa cuesta 500 unidades monetarias mientras que el salario horario total (cargas sociales incluidas) del obrero es 35 unidades monetarias, el precio real de la mesa es:

$$\frac{500}{35} = 14,28 \text{ salarios horarios}$$

Por lo tanto es fácil comparar el precio de esta mesa con el practicado en otro país, calculado también en sa-

larios horarios.

Se han calculado numerosos precios reales (26), pero se han deducido hasta ahora pocos índices.

C. OTROS INDICES

a) Fórmulas construidas a partir de Laspeyres y de Paasche

Las fórmulas de Laspeyres y de Paasche no dan en general el mismo resultado, cuando se aplican a los mismos índices elementales. Se observan a veces diferencias apreciables entre ellas. Por este motivo numerosos autores han pensado que la verdad (en la medida que ésta puede ser traducida por un sólo índice sintético) se situaría entre las dos: por lo tanto han propuesto un cierto número de índices que son de alguna manera medias de los índices de Laspeyres y de Paasche:

Edgeworth ha sugerido un índice cuyas ponderaciones son las medias aritméticas de los pesos del año de base y del año corriente. Para un índice de precios, la fórmula es la siguiente:

$$E_{i/o} = \frac{\sum_j (q_i^j + q_o^j) p_i^j}{\sum_j (q_i^j + q_o^j) p_o^j}$$

Sidgwick y Drobisch han propuesto la media aritmética simple de los índices de Paasche y de Laspeyres:

$$S = \frac{L + P}{2}$$

Irving Fisher ha preferido su media geométrica, que él ha bautizado como *Indice ideal*:

$$F = \sqrt{LP}$$

Este índice tiene la ventaja de ser reversible:

$$F_{o/i} = \sqrt{L_{o/i} P_{o/i}} = \frac{1}{\sqrt{P_{i/o} L_{i/o}}} \frac{1}{F_{i/o}}$$

(según la propiedad 2 anterior)

Pero no se le puede atribuir ningún significado económico preciso.

b) Indices utilizados para los salarios (27)

Se puede elaborar un índice de salarios ponderado no por la masa salarial (entonces se trataría de un índice de Laspeyres), sino por los efectivos de asalariados.

Designado por:

s_j^i, s_0^j los salarios de la categoría j en las fechas i y 0 .

n_0^j el efectivo de la misma categoría.

El índice se escribe:

$$S_{i/o} = \frac{\sum_j n_0^j \frac{s_i^j}{s_0^j}}{\sum_j n_0^j}$$

Este índice atribuye a cada persona la misma importancia, mientras que un índice de Laspeyres atribuye a

cada uno una importancia proporcional a sus ingresos. Existen diferencias a veces importantes entre los resultados de las dos fórmulas.

c) Indices de la productividad

La productividad es la relación:

$$\text{Productividad} = \frac{\text{volumen físico de la producción}}{\text{Factores de producción}}$$

Es difícil de medir, pero lo que es más importante es medir los progresos de productividad. Se utiliza la relación:

$$I = \frac{\text{índice del volumen de la producción}}{\text{índice del volumen de los factores de producción}}$$

Se estiman uno y otro por los valores, a precios constantes (28). El resultado depende desgraciadamente del sistema de precios constantes utilizado.

El repaso que se acaba de hacer de las fórmulas de índices estadísticos está lejos de ser completa. Sin embargo, se han presentado todas las fórmulas utilizadas en los índices oficiales.

El lector habrá comprendido ciertamente al final de esta parte del curso que las fórmulas de índices no dan todos el mismo resultado ... y por lo tanto la elección de esta fórmula no es neutra. Sin embargo, las imposiciones de la realidad no dejan mucha libertad a los estadísticos ...

III. PRACTICA DEL CALCULO DE LOS INDICES ESTADISTICOS

1. ALGUNOS INDICES DE DIFERENTES PAISES

No puede tratarse aquí de dar un inventario de todos los índices publicados en el mundo. Una publicación, desafortunadamente antigua, de las Naciones Unidas (29), puede permitir esta comparación exhaustiva. Contentémonos aquí con indicar algunas constantes, sobre todo en el uso de las fórmulas.

A. INDICES DE LOS PRECIOS AL CONSUMO

De un modo general, los índices de precios al consumo se calculan según las fórmulas de Laspeyres. Las diferencias esenciales provienen de la población cubierta o de la fecha del año de base. La página siguiente (fig. 13) reproduce la descripción de tres índices tomados al azar en orden alfabético. Se ve que si las fórmulas son análogas, las ponderaciones no lo son; la evolución de las proporciones entre la alimentación, la industria y el sector terciario, depende del estado de desarrollo del país:

. Países aún poco desarrollados: preponderancia alimenticia.

. Países más desarrollados: el sector secundario, mayor importancia.

. Países muy desarrollados: el sector secundario a su vez disminuye para dejar lugar al sector terciario (servicios).

Algunos países utilizan otras fórmulas distintas de la de Laspeyres:

- Indice cadena (en general cadena Laspeyres): Australia, Francia, Gran Bretaña, Suecia, Tailandia.

- La media simple se utiliza en Bélgica (cálculo en diferentes centros donde se efectúa la media simple de índices elementales).

Un método un poco análogo, pero con ponderaciones, se utiliza en Egipto.

- La fórmula de Paasche se utiliza en la República Democrática Alemana, en Rumanía, en la URSS.

- Los U.S.A. tienen un método especial, reproducido en la figura 14, siempre según el 1977 supplement ...

FIGURA 13

MEXICO (Ciudad México)

Título oficial: Índice de precios al por mayor en Ciudad México.

Base original. 1939 = 100 (también publicado sobre la base 1954 = 100).

Cálculo. Media aritmética ponderada en relación a la base en forma agregada, calculada por el Banco Central.

Pesos y composición. Los pesos se basan en el consumo estimado de artículos en todo el país durante 1939. Estas estimaciones se derivan del Censo Industrial de 1940, de datos suministrados por el Ministerio de Agricultura y de Estadísticas de Comercio Exterior. El número de ítems y pesos porcentuales de los grupos principales son los siguientes:

	Número de ítems	Pesos porcentuales
Bienes de consumo	(114)	(60,4)
Productos alimenticios		
Materias primas	29	27,6
Manufacturados	41	13,8
Productos no alimenticios	44	19,0
Bienes de producción	(96)	(39,6)
Materias primas		
No manufacturadas	15	13,8

Manufacturadas		
Metales, productos químicos, vegetales, papel y otros	47	7,9
Materiales de construcción	19	3,0
Combustible y energía	9	10,1
Vehículos y accesorios	6	4,8
TOTAL	210	100,0

El índice de precios al por mayor de productos agrarios es el componente de productos alimenticios no manufacturados del índice general, mientras que el índice de productos textiles es la subdivisión "productos textiles e hilados" del grupo "productos no alimenticios".

Especificación de precios. En la mayoría de los casos, los precios incluyen impuestos de venta y cargas de importación. No se tiene en cuenta las subvenciones. Las cotizaciones de precios para 44 artículos estacionales están ajustadas para variaciones estacionales.

Datos básicos de precios. Aproximadamente 316 cotizaciones de precios son recogidas por agentes directamente de establecimientos industriales, comerciantes e importadores en Ciudad México. La frecuencia de recogida varía de diaria a semianual, dependiendo de las fluctuaciones del ítem de que se trate.

Para otros detalles, véase Memoria de la Primera Reunión de Técnicos sobre Problemas del Banco Central del Continente Americano. 1946. Banco de México (Ciudad México).

MARRUECOS (Casablanca)

Título oficial. Índice de precios al por mayor en Casablanca.

Base original. 1939 = 100

Cálculo: Media aritmética ponderada sobre la base de precios relativos.

Pesos y consumo. Los pesos se basan en el valor de los bienes de consumo doméstico en 1938. Se derivan de los datos sobre producción más importaciones menos exportaciones. El número de ítems y pesos porcentuales de los grupos principales son:

	Número de ítems	Pesos porcentuales
Productos alimenticios	(20)	(70,0)
Cereales	5	36,4
Carne	3	11,9
Otros productos	12	21,7
Materias primas y productos industriales	(49)	(30,0)
Combustible	7	7,2
Minerales y productos metalúrgicos	7	8,4
Textiles y pieles	11	7,5
Productos químicos	12	3,3
Papel y madera	8	1,5
Materiales de construcción	4	2,1
TOTAL	69	100,0

El índice se clasifica también de acuerdo con productos nacionales e importados con pesos de 77 por ciento y 23 por ciento respectivamente.

Datos básicos de precios. Los precios se obtienen mensualmente en Casablanca de la Bourse de Commerce de Casablanca o directamente de mayoristas. En los datos se incluyen también algunos precios controlados.

HOLANDA

Título oficial. (a) Índices de precios de fabricante y precios de importación de materias primas compradas, productos semielaborados y materiales auxiliares.

(b). Índices de precios de fabricantes de productos finales.

Base original, 1970 = 100.

Cálculo. Media aritmética ponderada sobre la base de precios relativos.

Pesos y composición. Los pesos se derivan del valor de la producción nacional y de las importaciones registradas para 1969. Se ha aplicado una corrección de precios para traer la base a 1970. La composición de los índices independientes y de sus respectivos pesos son los siguientes.

(a) Índices de precios de fabricantes y de importación de materias primas compradas, productos semielaborados y materiales auxiliares:

	Pesos
Industrias de fabricación de alimentos	394,7
Industrias de bebidas y tabacos	10,4
Industrias de la madera y del mueble	20,9
Industrias químicas	71,2
Fabricación de productos textiles	48,5
Confección	25,9
Fabricación de papel y productos de papel	23,8
Industria del caucho	5,9
Industrias de productos sintéticos	10,2
Fabricación de calzado de cuero y otros productos de cuero	8,2
Industrias del petróleo crudo	109,7
Fabricación de materiales de construcción, cerámica y vidrio	14,2
Industrias metálicas	146,1
Auxiliares	110,3
TOTAL	<u>1000,0</u>

Este índice se compila también del siguiente modo:

	Pesos
Importados	558,1
Nacional	441,9
TOTAL	<u>1000,0</u>

FIGURA 14

ESTADOS UNIDOS

Título oficial. Índice de precios al consumidor para asalariados urbanos y trabajadores de oficina.

Base oficial. 1967 = 100

Cálculo. Los cambios de precios medios desde el periodo de precios precedente hasta el mes corriente se expresan en términos porcentuales para cada ítem y los cambios porcentuales para los diferentes bienes y servicios se combinan usando factores de ponderación basados en la importancia del ítem en los gastos del consumidor y en la de los otros ítems a los que éste representa. Esta importancia compuesta se denomina peso de costo del ítem de la cesta de la compra. Los pesos de esto para cada ítem se combinan entonces dentro de los totales del área para grupos de artículos y todos los ítems. Los totales de los Estados Unidos se obtienen combinando 56 totales de área, siendo ponderado cada total de área de acuerdo con la proporción de asalariados y oficinistas que representa en el índice basado en cifras de 1960.

Pesos y composición. Los pesos y los ítems seleccionados eran derivados de las inspecciones de los gastos de consumidor cubriendo unas 5000 unidades de asalariados urbanos y oficinistas consumidores. Las inspecciones eran llevadas a cabo en 72 áreas urbanas, representando principalmente gastos en 1960-61. Las familias representadas en el índice tenían un tamaño medio de 3,7 personas y sus ingresos anuales medios familiares eran de unos 6.230 dólares después de impuestos. Los ingresos anuales medios por persona eran de unos 3.560 dólares después de impuestos. El número aproximado de ítems en cada grupo mayor y la importancia relativa de los grupos a partir de Diciembre de 1974 eran los siguientes:

Grupo	Número de ítems	Pesos porcentuales
Alimentación	101	24,8
Vivienda:		
Casa (renta, propiedad así como mantenimiento y reparación)	17	21,3
Energía y servicios	10	5,0
Suministros y operaciones domésticas	53	7,5
Vestidos	68	9,6
Transportes	40	12,7
Cuidados médicos	56	6,3
Cuidados personales	12	2,5
Lectura y recreo	31	5,2
Otros	17	5,1
TOTAL	405	100,0

Datos de precios. La mayoría de los precios se recoge mediante agentes a partir de una muestra representativa de unas 18.000 tiendas y establecimientos de servicios en 54 áreas urbanas. El nivel, los alquileres se obtienen de unos 40.000 inquilinos. Los precios para ítems alimenticios, servicios y unos cuantos ítems importantes más se recogen mensualmente en cada localidad urbana. El precio de la mayoría de los demás bienes y servicios se determina mensualmente en las cinco mayores áreas metropolitanas y trimestralmente en todas las demás áreas. Publicaciones nacionales. Monthly Labor Review y the CPI Detailed Report, Bureau of Labor Statistics, Department of Labor (Washington, D.C. 20212).

Para más detalles metodológicos, véase the Consumer Price Index: History and Techniques, Bulletin No. 1517, BLS Handbook of Methods, Bulletin 1711, 1971, Bureau of Labor Statistics Department of labor (Washington, D.C. 20212).

B. INDICES DE PRECIOS AL POR MAYOR

Todos los países utilizan un índice de Laspeyres, con excepción de Bélgica que utiliza una media geométrica simple de índices elementales, y de la URSS que emplea un índice cadena.

C. INDICES DE LA PRODUCCION INDUSTRIAL

Los índices son en general índices de Laspeyres. A menudo hay corrección de las variaciones estacionales y del número de días laborables. Bélgica, Yugoslavia y algunos otros países utilizan índices cadena. En 1977, los años de base eran los siguientes, para un cierto número de países:

TABLA 19

Año de base de los índices de la producción industrial
(en 1977)

Argentina	1960	R.F.A.	1970
Australia	1963	Hungría	1975
Austria	1971	Italia	1972
Brasil	1970	Japón	1970
Bulgaria	1960	Méjico	1970
Canadá	1971	Portugal	1970
Dinamarca	1970	España	1962
Francia	1970	U.R.S.S.	1970
R.D.A.	1975	Gran Bretaña	1970

2. DIVERGENCIAS ENTRE LOS INDICES

El lector atento de las páginas que preceden está convencido, así lo esperamos nosotros por lo menos, que las diferentes fórmulas de índices que hemos descrito, no dan los mismos resultados. Los índices, calculados por estadísticos integrados pero diferentes, pueden igualmente ser divergentes a causa de la elección de las series.

La elección de la fórmula, la elección del año de base, el de las series de precios, no son neutras: Elección otra fórmula, u otro año de base conduce a un resultado un poco distinto. A corto plazo, las diferencias son en general débiles, pero a largo plazo, son a veces desmesuradamente importantes.

Más profundamente, se puede incluso preguntar si existe realmente un índice único para representar series

elementales dispersas. Una toma de conciencia de la dispersión de estos índices con ayuda de características estadísticas es indispensable en todo caso.

Las ciencias más antiguas, como la ciencia física, han ayudado a sus usuarios a comprender la noción de **error**. Sería útil desarrollar esta noción en estadística y particularmente en lo que se refiere a índices.

El objeto del presente párrafo es desarrollar las ideas que acabamos de exponer. La investigación de la noción de error en estadística está actualmente en estado embrionario, pero quisieramos desarrollar un cierto número de pistas, algunas de las cuales son personales y que podrían permitir avanzar en este campo.

A. DIVERGENCIAS DEBIDAS A LAS FORMULAS

Algunos de los ejemplos que han sido dados en los capítulos que preceden muestran que la elección de la fórmula tiene una incidencia sobre el resultado final (ver las diferencias entre los índices de Laspeyres y de Paasche y las que hay entre los índices cadena y los índices de base fija en las páginas que preceden).

En un estudio anterior (30) hemos utilizado un material de precios, el de los precios de 213 artículos que, en Francia, han sido reunidos en el índice de base 1949. Estos precios habían sido observados desde 1840 a 1954.

Este material ha servido para calcular cantidad de índices de precios de fórmulas diferentes.

Los resultados no difieren más que a causa de las fórmulas y no a causa de los precios como los productos escogidos. Se presenta una recapitulación de estos índices en la tabla de la página siguiente.

Hay que señalar que si se exceptúan los índices cadena, todos los demás índices son bastante próximos unos de otros, en el sentido de que las divergencias que aparecen entre ellos son del orden del 40% como máximo. Esta tasa de disparidad, se considerará aún elevada, evidentemente, por todos los hombres que pensaban que todas las fórmulas de índices debían dar las mismas cifras, o cifras muy próximas. Pero, inversamente, puede parecer bastante débil a los economistas que eran conscientes de las divergencias que implican necesariamente las diferentes fórmulas, teniendo en cuenta el hecho de que se trata de un período de tiempo que supera un siglo.

Esta constatación permite afirmar que la evolución del costo de la vida se puede definir en los límites del intervalo formado por los índices que han subido más y los que han subido menos. Se puede admitir por ejemplo, que la amplitud de la evolución está comprendida entre el índice de Laspeyres VIF y la media aritmética IA; el índice XB da la referencia útil de la dispersión entre el primer y tercer cuartil. Por fin, el índice XD muestra los límites extremos de la población de precios estudiada, es decir el índice del producto cuyo precio ha subido más, y el del producto cuyo precio ha subido menos (cf. tabla 21).

Se puede concluir que pueden considerarse como legítimos, desde el punto de vista de la técnica estadística, los índices que muestran que el coste de la vida ha sido de 1840 a 1954, multiplicado por un número comprendido entre 140 y 250. ¡Aún es una dispersión muy grande!

Más precisamente, si se busca un índice de significado económico a la vez simple y concreto, probablemente es el de Laspeyres IVD al que se dará preferencia; este índice IVD se controla y en cierta medida garantiza por el cálculo de índices que tienen lagunas: IV A, IV B. Este índice IV D asigna al costo de la vida un valor 159 veces mayor en 1952 que en 1840.

Por otra parte, el economista que se interesa a corto plazo notará que, si no se limita a las confrontaciones de los extremos de la cadena secular, sino a los movimientos de un año a otro, aparecen importantes disparidades de detalle, pudiendo ir hasta a poner en cuestión el sentido de la evolución.

TABLA 20
TABLA RECAPITULATIVA DE LOS PRINCIPALES INDICES CALCULADOS

AÑO	I A	II A	III A	IV A	IV B	IV D	VI G	VII A	VIII B	IX A	IX B	X A
1840	673	519	419	611	611	621	471	----	----	250	2 032	457
1850	844	512	404	622	573	615	----	----	----	244	1 721	434
1860	760	565	460	664	648	650	478	522	589	280	1 767	483
1870	781	594	490	723	708	711	----	----	----	318	1 830	500
1880	712	549	460	727	753	762	626	----	----	321	1 695	495
1890	669	459	424	681	699	756	483	----	----	306	1 503	448
1900	818	523	422	680	684	705	459	488	576	302	1 373	435
1910	660	----	434	647	681	649	----	----	----	312	1 308	477
1914	691	----	463	724	788	----	----	----	----	326	1 341	505
1920	2 166	1 875	1 574	2 195	2 220	2 183	2 146	----	----	1 263	3 645	1 979
1930	3 372	----	2 711	3 688	3 943	3 693	3 489	3 489	3 587	2 348	5 500	2 874
1940	5 204	4 543	4 058	5 365	5 573	5 357	4 951	----	----	3 891	7 578	4 591
1950	75 428	73 840	72 300	77 838	80 225	77 826	----	----	----	71 907	75 352	73 370
1952	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
1954	93 730	92 810	91 800	97 190	97 692	96 713	----	----	----	98 517	88 555	95 280

I A : Media aritmética simple.
 II A : Media geométrica simple.
 III A : Media armónica simple.

IV A : Laspeyres, 1952, con lagunas. VI G : Índice empalmado
 IV B : Laspeyres, 1952, 50 artículos. VII A : Índice de Paasche.
 IV D : Laspeyres, 1952, ponderación re- VIII B : Índice de Fisher,
 constituida.

IX A : Índice cadena, descendiendo el tiempo.
 IX B : Índice cadena, remontando el tiempo.
 X A : Mediana.

Fuente: Jacqueline FOURASTIE, Les formules d'indices de prix, Armand Colin, Paris 1966.

TABLA 21
LIMITES DE LAS VARIACIONES DEL INDICE DEL COSTO DE LA VIDA
ENTRE 1840 Y 1954

AÑO	VI F	IA	INDICE X B		INDICE X D	
			1 ^{er} cuartil	3 ^{er} cuartil	Primero	Ultimo
1840	377	673	317	851	161	2 616
1850	---	844	301	930	127	8 606
1860	405	760	325	927	161	5 009
1870	---	781	340	968	161	5 009
1880	492	712	350	766	145	5 009
1890	474	669	310	665	186	4 800
1900	454	818	317	750	160	14 080
1910	---	660	341	736	155	5 517
1914	---	691	374	726	155	5 567
1920	2 114	2 166	1 423	2 589	490	14 187
1930	3 489	3 372	2 212	3 890	1 111	16 304
1940	4 951	5 204	3 207	6 157	1 317	24 249
1950	---	75 428	65 280	83 380	43 995	140 180
1952	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
1954	---	93 730	87 020	100 000	51 800	136 920

VI F : Laspeyres 34 artículos, base 1930

IA : Media aritmética simple

XB : Primer y tercer cuartil

XD : Primer y Último índice

Estamos pues ante la situación siguiente: se calculan cada vez más índices y se tiene cada vez mayor necesidad de ello. Sin embargo, nos encontramos ante múltiples fórmulas de cálculo, tales que ninguna de ellas pueda considerarse como perfecta o incluso como siendo superior a las otras de manera decisiva. Se puede decir solamente que un índice cadena de ponderación fija, no se debe utilizar más que en un período muy corto. Los demás índices parecen tener todos un cierto valor; cada fórmula tiene sus ventajas propias, pero también sus inconvenientes y sus defectos. Se podría dar sin embargo una preferencia a los índices de Laspeyres, a causa de su significado concreto y de su relativa facilidad de cálculo.

Se debe hacer una elección en cualquier caso. Conviene no olvidar que es una elección. Sería incluso deseable poder calcular, como lo hemos hecho anteriormente, varios índices, e indicar, como en nuestra última tabla, algunos topes entre los cuales se sitúa la verdadera variación de la realidad estudiada ... en tanto en cuanto es medible por un número único.

B. DIVERGENCIAS EN LA ELECCIÓN DE LAS SERIES ELEMENTALES

Todo cálculo de índice sintético supone una elección para las series elementales:

- Si se trata de un índice de cantidad (producción industrial), incluso si se decide que se debe ser exhaustivo, el reparto de las industrias en ramas supone una parte de arbitrariedad.

- Si se trata de un índice de precios, se deben hacer varias elecciones. Nosotros las desarrollamos a continuación de este párrafo.

Para representar la variación de precios en un país, es imposible seguir todos los precios de todos los artículos en venta. Se eligen pues los artículos o grupos de artículos representativos. Cada vez más, esta elección se hace con ayuda de la observación de los gastos del hogar: así las grandes categorías, están todas representadas (la alimentación, y dentro de la alimentación, el pan y la carne), pero la elección del artículo a observar sigue siendo difícil (¿Hay que tomar el pan de dos kilos la barra o el pan envuelto para representar el pan?). Los estadísticos se guían lo mejor que pueden sobre el uso de los consumidores pero esto no es simple. Dos estadísticos honestos, trabajando separadamente, no harán las mismas elecciones.

Por otra parte no basta con determinar qué artículos se va a observar sino hay que determinar dónde se va a hacer esta observación: ¿en qué almacén, en qué gran área ...?

A menudo, también hay que precisar la marca del objeto. Los estadísticos y los encuestadores se encuentran ante decisiones difíciles que toman lo mejor que pueden, pero de las cuales no pueden más que muy raras veces, decir que son las únicas posibles.

¿Qué ocurre entonces, si el artículo elegido deja de ser vendido? Se decide pues observar el precio del pan de dos kilos, pero la mayoría de los panaderos no lo venden ya (y dejan, después de algunos años, de estar obligados a hacerlo). Se ha elegido una marca y un modelo de aparato de radio de transistores y este modelo deja de ser vendido. Aquí aún, son posibles varias opciones: Tomar un objeto del mismo uso y de la misma calidad, tomar otro objeto cuya calidad es un poco superior, pero no tener en cuenta la variación de precio ... los problemas son tanto más difíciles cuanto que se plantean para cada encuesta y que el estadístico responsable no puede más que dar directrices generales y ayudar al encuestador a decidir.

En las páginas siguientes damos un ejemplo de búsqueda de precios en un caso particularmente simple (31). Lejos de encuestar en cantidad de puntos de venta, hemos utilizado un único catálogo de venta por correspondencia, el más famoso en Francia desde hace mucho tiempo, el de **Manufrance**; se trataba de seguir el precio del agua de colonia en un período largo. El lector podrá constatar que hemos debido distinguir cuatro productos diferentes (en las cuatro columnas) y que por otra parte, para cada uno de estos productos de él aparecen cambios de detalle. Se ha hecho una elección, el precio retenido, pero otro estadístico honesto hubiera podido hacer otra elección.

FIGURA 15
AGUA DE COLONIA

Años	Precios Observados				Precios retenidos	Indice base 1949	Indice base 1914
	A	B	C	D			
1904	5.00					98	111
1905	5.00					98	111
1906	4.75				4.75	94	106
1907		2.75			4.35	86	97
1908		2.60			4.12	81	92
1909		2.60			4.12	81	92
1910		2.60			4.12	81	92
1911		3.00	4.75		4.75	94	106
1912		3.25	4.75		4.75	94	106
1913		2.75	4.50		4.50	89	100
1914		2.75	4.50		4.50	89	100
1920	10.00	14.00			14.00	276	311
1921	10.00	23.50			23.50	463	522
1922	9.75	16.00	19.00		16.00	315	356
1923	9.75	14.00	15.50		14.00	276	311
1924	10.00	15.50	15.00		15.50	305	344
1925	15.00	20.00	22.50		20.00	394	444
1926	14.00	21.00	25.00		21.00	413	467
1927	17.50	27.50	28.00		27.50	541	611
1928	17.50	27.00	30.00		27.00	531	600
1929	20.50	25.00	28.50		25.00	492	556
1930	21.00	25.00	29.00		25.00	492	556
1931	19.25	24.50	28.50		24.50	482	544
1932	18.50	(24.50)	(28.00)		27.84	548	619
1933	18.50	(24.50)	(24.50)		27.84	548	619
1934	18.50	(24.50)	(24.50)		27.84	548	619
1935		(22.50)	(24.00)		25.57	503	568
1936		25.50			25.50	502	567
1949			508			10 000	11 289
1950			485			9 547	10 778
1951			530			10 433	11 778
1952			660			12 992	14 667
1953			640			12 598	14 222
1954			640			12 598	14 222
1955			640			12 598	14 222
1956			655			12 894	14 556
1957			680			13 386	15 111
1958			795			15 650	17 667
1959			915			18 012	20 333
1960			9.15			18 012	20 333
1961			9.60			18 898	21 333
1962			10.35			20 374	23 000
1963			10.35			20 374	23 000
1964			10.45			20 571	23 222
1965			10.85			21 358	24 111
1966			11.95			23 524	26 556
1967			11.95			23 524	26 556

FIGURA 15

Fuentes: Catálogos Manufrance

Columna A :

- 1904 Página azul 73, nº 647 B.
Agua de colonia perfumada, calidad extra, para el mantenimiento de los cabellos y para el aseo del cuerpo y de la cara, 1/2 litro.

Columna B :

- 1907 P. 924, nº 3075.
Agua de colonia "Diana" perfumada, para el aseo de la cara o del cuerpo, garantía 60º de alcohol 1/2 litro.
- 1911 P. 936, nº 2530.
Agua de colonia "Patria", para el aseo de la cara y el cuerpo, garantía 60º alcohol, 1/2 litro.
- 1913 P. 1080, nº 1765.
Agua de colonia "Patria", garantía 65º de alcohol, para el aseo de la cara y el cuerpo, masaje, fricciones, lociones, etc. 1/2 litro.
- 1926 P. 404, nº 21-2370.
Agua de colonia "Patria", garantía 60º de alcohol, para fricciones, baños, masajes, etc. 1/2 litro aproximadamente.
- 1932 P. 490, nº 35-4760.
Agua de colonia "Patria", garantía pura 60º, calidad extea, para baños, masajes, etc, el frasco de 49 cl.

Columna C :

- 1911 P. 936, nº 2545.
Agua de colonia "Patria" superior perfumada, para el aseo de la cara y del cuerpo, garantía 76º de alcohol, 1/2 l.
- 1923 P. 407, nº 21-3000 A.
Agua de colonia "Patria", garantía 80º, muy perfumada, para el aseo y todos los usos higiénicos, calidad extra, 1/2 l.
- 1932 P. 490, nº 35-4765 A.
Agua de colonia "Patria", garantía pura 80º, calidad extra superior, el frasco de 44 cl.
- 1936 P. 477, nº 35-1271 A.
Agua de colonia "Patria", garantía pura 80º de alcohol, perfumada, 1/2 litro.

Columna D :

- 1922 P. 407, nº 21-3001 A.
Agua de colonia ambrée "Patria", extra-añeja, finamente perfumada, 1/2 litro.
- 1923 P. 407, nº 21-3001 A.
Agua de colonia ambrée "Patria", extra-añeja, finamente perfumada garantía 75º, 1/2 litro.
- 1926 P. 404, nº 21-2377 A.
Agua de colonia ambrée "Patria", garantía 80º, extra-añeja y perfumada, 1/2 l. aproximadamente.
- 1932 P. 490, nº 35-4775 A.
Agua de colonia ambrée "Patria", garantía 80º, refrescante, muy perfumada, el frasco de 44 cl.
- 1949 P. 124, nº 21-4145 B.
Agua de colonia ambrée "Vallée des Fleurs", bajo contenido de alcohol, añafea, 1/2 l.

Para mantener una cierta homogeneidad en la serie, se ha mantenido el siguiente criterio: "Agua de colonia con aproximadamente 80º de alcohol, 1/2 l.". Esto ha dado lugar a un cierto número de cálculos:

- El empalme del agua de colonia B con el agua de colonia C en 1914, para mantener la graduación de 80º.
- La conversión, para los años de 1932 a 1935, del frasco de 44 cl al frasco de 50 cl.

El índice se refiere:

- De 1904 a 1906 al precio A.
- De 1907 a 1910 a los precios B empalmados en 1911 a la serie C.
- De 1911 a 1931 y en 1936 al precio C.
- De 1932 a 1935 a los precios del frasco C de 44 cl. convertidos en precios de un frasco ficticio de 50 cl.
- De 1949 a 1967 a los precios D.

No podemos entrar en detalle de los numerosos medios que los estadísticos han creado para resolver lo menos mal posible estos problemas, haría falta otra obra para tratar de ello (32).

Subrayamos solamente esta nueva e importante causa de divergencias.

C. DIVERGENCIAS DEBIDAS A LAS PONDERACIONES Y A LA ELECCION DEL AÑO DE BASE

Otras causas de divergencias son las elecciones de ponderación. Estas elecciones se presentan de dos maneras:

- Habiendo sido elegido el año de base se puede tener que determinar la población cubierta. Un índice de precios al consumo, por ejemplo, no será el mismo si se refiere a un presupuesto de obrero, o a un presupuesto de ejecutivo, al presupuesto de los habitantes de ciudades o al de campesinos ...

- La ponderación depende también del año de base elegido. Para un índice de precios, una base antigua refleja un consumo antiguo, a menudo con preponderancia alimenticia marcada, mientras que el índice de base reciente tiene preponderancia secundaria o terciaria. Para un índice de producción, una base antigua tiene en cuenta precios antiguos, a menudo más elevados que los precios actuales cuando se trata de productos industriales de gran progreso técnico, y por el contrario equivalentes a los precios actuales para los precios con progreso técnico bajo o nulo. La base antigua sobreestima pues la progresión. A causa de esta influencia del año de base nosotros hemos señalado al principio de esta tercera parte los datos de base de los índices de la producción industrial en diferentes países. Las diferencias son a veces importantes (aunque en la mayoría de los casos hayan sido compensadas por un cambio de base desde 1977; es lo que ha ocurrido en España).

Conviene, en todo caso ser consciente de que estas elecciones tienen una influencia sobre la variación del índice.

D. ¿EXISTE UN INDICE SINTETICO UNICO? (EJEMPLO DE LOS PRECIOS)

El alza de precios no existe. Esta fórmula un poco chocante de J.P. Piriou es ciertamente justa. La realidad es que los precios varían, pero de manera en gran medida desordenada: La tasa de inflación del franco no existe. Lo que existe es la variación del poder de compra del franco cuando se compra una cierta marca de salchichón o de camembert y esta variación no es la misma para el salchichón y para el camembert ... lo que existe, es un aumento de precios y por lo tanto de los índices de precios. No se puede caracterizar realmente el alza de precios más que por una sucesión casi innumerable de índices elementales. Las tentativas que se han

hecho actualmente no tratan tanto de resumir en uno solo todos estos índices elementales, cuanto a estimar la variación de un presupuesto que representa el consumo de una persona o de una serie de personas: Se consigue esto aproximadamente, cuando este consumo no cambia ... pero cambia con el tiempo (y desde luego con la evolución de precios).

Es importante estar muy convencido de que no existe realmente una tasa de inflación, o un aumento del nivel general de precios. Sin embargo, los usuarios constatan, en muchos países, que la mayoría de los precios suben: desean conocer una medida de este aumento. De ahí los cálculos de índices del costo de la vida o de los precios al consumo. Hay que ser consciente de que no miden el costo de la vida sino variaciones del coste de una cesta de la compra bien definida y parcialmente arbitraria, es decir, una media de índices elementales, mientras que pueden existir otras medias de los mismos índices elementales y también otros índices elementales que hay que tomar en consideración.

La única manera de conocer la evolución de precios sería conocer cada uno de los índices elementales. Lo engoroso es que el espíritu humano no es capaz más que de una idea cada vez y de que una gran tabla de cifras (o una serie de compras efectuadas) no le deja más que una impresión parcial. Cuando nos quejamos de la vida cara o del aumento del precio, nos basamos a menudo en observaciones insuficientes: He comprado tal objeto: su precio ha aumentado en tanto sobre el mismo objeto hace un mes (... pero olvido durante este tiempo que he comprado otros objetos cuyo precio no ha subido) o aún: He estado en unos grandes almacenes y he gastado más que la última vez (pero, ¿He comprado las mismas cosas?) ... Estos ejemplos muestran la dificultad de aprender todo lo real al mismo tiempo ... solamente Dios lo puede hacer: el hombre no es capaz de ello.

Los párrafos siguientes están destinados a dar ejemplos de lo que sería necesario hacer para relativizar los índices sintéticos en la opinión de los utilizadores y del gran público: si el alza de precios no existe y si se calcula cuando menos un índice sintético para representarlo, conviene mostrar que este índice no mide la realidad (del cual nosotros acabamos de decir que no existe, con precisión, sino que no es más que un orden de magnitud, del cual sería bueno mostrar, con qué grado de aproximación está determinado).

a) Dispersión de índices

1. Exposición del problema

Si todos los índices elementales que se quieren resumir con un índice sintético son iguales, el índice sintético es igual a estos índices elementales; en este caso, es cierto excepcionalmente, el índice sintético existe y es preciso.

Si, en el otro extremo, algunos de los índices elementales bajan mucho, mientras que otros aumentan mucho y algunos permanecen estables, la dispersión de índices elementales es importante: el índice sintético que tiene de representar estos índices elementales no está determinado de manera precisa. Según la elección de la fórmula o de la ponderación, se pueden encontrar varios índices sintéticos bastante diferentes unos de otros.

Entre los dos extremos, si los índices elementales son un poco dispersos, el índice sintético no es único, pero los índices sintéticos de fórmulas o de ponderaciones diferentes no son demasiado diferentes entre ellos.

El remedio a este estado de cosas, no puede ser renunciar a publicar un índice sintético, pues la presión de los gobiernos y del gran público es demasiado fuerte, sino que quizás sea publicar los índices sintéticos con una característica de dispersión. Así, el utilizador sabrá en cuál de los tres casos citados anteriormente se coloca el índice global que conoce. No se debería publicar nunca una serie de índices sin publicar al mismo tiempo la dispersión de los datos por medio de los cuales ha sido calculado este índice (33).

2. Noción de dispersión

Conviene precisar esta palabra **precisión**. Un ejemplo puede permitir comprender esta noción. Supongamos que se tienen dos series de índices elementales:

94	98	100	103	105
<i>y</i>				
70	90	100	115	125

Estas dos series se muestran diferentes. La media aritmética simple de ambas es igual a 100, así como su mediana. Las dos series pueden pues ser representadas por un mismo índice sintético. Lo que las diferencia es la dispersión de los índices elementales. Esta dispersión se puede medir con ayuda de un cierto número de características.

Se pueden caracterizar las dos series por su extensión (11 puntos para la primera, 55 puntos para la segunda) o por su desviación absoluta media (3,2 puntos para la primera, 16 para la segunda) o mejor aún por su desviación típica (3,85 para la primera y 19,2 para la segunda). En todos los casos, se ve que la dispersión de la segunda es mayor que la de la primera (alrededor de 5 veces mayor).

3. Presentación de resultados

Parece que los índices sintéticos podrían ser presentados con las desviaciones típicas correspondientes. Por ejemplo, se diría que la primera serie tiene como índice sintético 100 y por desviación típica 3,86 o que la serie de índices de 1982, base 1960 de la tabla de la página 34 tiene como índice sintético 1.043,1 (media aritmética) con una desviación típica de 295 puntos. Se informa así al lector que todos los índices no son paralelos en su evolución y tiene una idea de su dispersión.

b) Noción de error

En las ciencias físicas, la noción de error se utiliza mucho. Ningún físico, incluso estudiante, presenta resultados sin hacer al mismo tiempo un cálculo de error.

El error, tal como se define en las ciencias exactas, es la diferencia entre el valor estimado a' de un número, y su valor exacto a . Esta diferencia no es conocida, pues el valor exacto no lo es. Se calcula entonces una mayorante del error.

Pero lo que se refiere al cálculo de un índice sintético, el problema es que el valor exacto no existe. En una intervención reciente (34), la señora Bárbara Bailar del Bureau of Census de los Estados Unidos, afirmaba, después de muchos otros, que el valor exacto de un dato económico no puede ser definido más que como el que se obtiene utilizando un método sobre el que están de acuerdo los expertos. No hay verdadero valor, sino solamente un resultado sobre el cual puede haber un cierto consenso científico. Hemos visto desde luego que en materia de índices este consenso incluso es muy relativo y que estadísticos integros pueden emplear métodos del todo aceptables científicamente y encontrar resultados diferentes.

Se puede concluir diciendo que no existe índice sintético único... y que a veces incluso lo que el índice trata de medir no es medible ... Una pista de investigación importante en el momento actual consistiría en buscar lo que debe reemplazar el error cuando se trata de un cálculo de índices: una indicación que diese una idea de un grado de aproximación. No se diría ya: que el índice sintético vale tanto, sino una idea de la evolución del costo de la vida (o de otra realidad) se puede dar con ayuda de un índice que vale entre tanto y tanto. Esto evitaría, en todo caso, las batallas sobre el último decimal de un índice sintético, calculado en deslizamiento con relación al mes precedente, pues el significado científico de esta última cifra decimal es prácticamente inexistente.

A la espera de encontrar esta indicación que reemplazase al error, sería quizás deseable publicar varios índices o un índice doble o incluso un índice sintético acompañado de una característica de dispersión (desviación típica).

3. INDEXACION, MEDIDA DEL PODER DE COMPRAS

A partir de un cierto número de ejemplos, mostraremos los principales usos que se hacen de los índices de precios y particularmente de los precios al consumo en la vida corriente.

Seguidamente pasaremos a plantearnos la cuestión: ¿Se puede medir el poder de compra o al menos sus variaciones?.

A. ACTUALIZACION DE DATOS. INDEXACION

Primer ejemplo: El índice de alquileres ha aumentado un 10% a lo largo del año. ¿Cuál debe ser el importe de mi alquiler, sabiendo que el año pasado era de 5.600 F?

Todo ocurre como si el índice de alquileres pasase de 100 a 110. Mi alquiler, indexado sobre este índice se convierte en:

$$5\,600 \times \frac{110}{100} = 6\,160 \text{ F}$$

Segundo ejemplo: Una tierra de Beauce se alquila, en 1983 en 12.500 F indexados sobre el precio del trigo. El precio del trigo pasa de 97 F el quintal en 1979 a 132 F en 1983. ¿Cuál debe ser el importe del alquiler en 1983?

El alza del alquiler debe ser proporcional al precio del trigo. El alquiler en 1983 debe ser por lo tanto:

$$12\,500 \times \frac{132}{97} = 17\,010,31 \text{ F}$$

(132/97 es el índice del precio del trigo).

Tercer ejemplo: el precio de un automóvil 2 CV Citroën en 1949 era de 229.000 Francos (antiguos). ¿A qué precio de 1983 corresponde el precio de 1949?.

Son posibles varias soluciones, cada una presentando su interés particular:

1º El precio del 2 CV en 1983 es de 28.280 F. Hay una correspondencia cierta entre los dos precios, ya que son los que paga el comprador en estas dos fechas. Pero:

- El 2 CV ha cambiado. El de 1983 tiene mejores características que el de 1949. Se trata de un 2 CV 6 (especial 4).

- En ausencia de otro elemento de comparación, nada permite saber si es más fácil para un francés comprar un 2 CV en 1983 que en 1949.

2º Se puede tratar de aplicar una deflación al precio de 1949 para transformarlo en Francos constantes de 1983. Para ello, se traslada el índice del costo de la vida de 1949 a 1983 y se multiplica el precio de 1949 por este índice.

Para conocer el índice del costo de la vida en Francia de 1949 a 1983, conviene efectuar empalmes, a partir de los índices del INSEE:

El último índice publicado con base 1970 (mayo 1983) vale 345,5. El INSEE da los coeficientes de empalme (básados en teorías indicadas anteriormente) en los anuarios estadísticos.

TABLA 22

Coeficientes de empalme que permiten relacionar los índices de bases 1962, 1956-1957, 1949, 1938 y 1914

Coeficientes para relacionar el índice mensual nacional de precios al consumo de los hogares urbanos cuyo cabeza de familia es empleado o obrero (1970 = 100) sobre la base 100:

1962	1,372
19 de Julio de 1956-30 Junio 1957	1,943
1949	2,852
1938	47,80
1914	337,5

Fuente: Annuaire Statistique de la France, 1973, p. 513.

Esta tabla indica que para relacionar el índice mensual nacional de precios al consumo con la base 100 en 1949, hay que multiplicarlo por 2,852. El índice en mayo de 1983 sobre origen 1949 es por lo tanto:

$$345,5 \times 2,852 = 985,37$$

Para estimar 229.000 F de 1949 en francos constantes de 1983, se efectúa el producto de este precio por el índice. Se divide por 10.000: una vez por 100 para pasar del índice a un índice multiplicador, otra vez por 100 para pasar de francos antiguos a francos nuevos:

$$\frac{229\,000 \times 985,37}{10\,000} = 22\,565 \text{ F}$$

Este precio es un poco inferior al practicado en 1983. ¡El resultado tendría pues que comprobar que el poder de compra del asalariado habría bajado un poco de 1949 a 1983 en lo que se refiere a los 2 CV! De hecho, esto demuestra solamente que el precio relativo del 2 CV ha aumentado, vamos a verlo.

Una solución mejor consiste en calcular cuantas horas debe trabajar un asalariado bien determinado (el mismo en 1949 que en 1983) para comprar un 2 CV. Se trata del método de precios reales del que ya se ha hablado anteriormente.

El método, preconizado por Jean Fourastié, consiste en utilizar el salario horario total (cargas sociales incluidas) de un obrero. (35).

En 1949, este salario era de 74,15 francos (antiguos).

En 1983, es de 31,13 francos (nuevos).

El precio real, número de horas que un obrero debe consagrarse a la compra de un 2 CV, aproximadamente equivalente al número de horas de equivalente obrero (36) necesarias para la fabricación del 2 CV, contando el trabajo en la fábrica y el trabajo necesario para la extracción de las materias primas y para la fabricación de los productos semi-elaborados utilizados es por lo tanto:

$$\text{en 1949 } \frac{229\,000}{74,15} = 3.088 \text{ salarios horarios}$$

$$\text{en 1983 } \frac{28.280}{31,13} = 908 \text{ salarios horarios}$$

Resulta pues que el precio del 2 CV correspondía aproximadamente a 15 meses de salario de un obrero de 1949. En 1983 no corresponde más que a cinco meses de salario. Se comprende por qué casi todos los franceses tienen automóvil en 1983, mientras que en 1949, muy pocos lo tenían. (Según l'Annuaire Rétrospectif de l'INSEE 1961, el número de automóviles particulares nuevos matriculados en 1949 en Francia era de 115.857; en 1981, según l'Annuaire 1982 era de 1.834.261, es decir más de 15 veces más (en 1949, un francés de cada 500 había comprado un coche nuevo; en 1981, un francés de cada 18 ha comprado uno)).

Volvamos a considerar el resultado del segundo: en francos constantes de 1983, el 2 CV de 1983 vale un poco más caro que el de 1949. ¿Qué significa eso? Simplemente que el precio del automóvil ha subido aproximadamente como el índice del coste de la vida. La tabla que figura a continuación (37) muestra que algunos precios han subido más rápido que el índice, otros menos rápido. Los índices elementales 1982-1925 son las relaciones de los precios nominales; el coeficiente 2,8 para el índice INSEE corresponde de hecho a una multiplicación del índice por 280 (dividido por 100 para hacer comparables los antiguos francos y los nuevos). 1925 y 1974 son dos años en que los precios son comparables: El precio en antiguos francos de 1925 es aproximadamente el de 1974 en francos nuevos. (Coeficiente de variación del índice del costo de la vida: 1,00).

Los salarios de los obreros han subido más rápidamente que todos los precios e índices: el poder de compra de los obreros ha aumentado fuertemente en el periodo. Los servicios, la tierra de Beauce, el oro, han subido también

mucho, los productos agrícolas un poco menos. Han bajado con relación al índice del costo de la vida algunos productos agrícolas y los productos manufacturados (de fuerte progreso técnico). El automóvil se sitúa por debajo del índice desde 1925, pero no, como acabamos de verlo, desde 1949.

Este ejemplo muestra la dificultad de la interpretación del índice empalmado a largo plazo. No se puede contar con él para estimar el poder de compra. Durante el periodo en el que el mismo índice se conserva, este índice estima el poder de compra de una suma de la que dispone un consumidor cuyo consumo está bien determinado. Pero cuando se cambia de índice, no se sabe ya qué consumidor se sigue; pues, es claro que, desde 1949, el nivel de vida del consumidor medio seguido por el INSEE en sus índices ha subido mucho.

Cuarto ejemplo: ¿Qué significan los agregados de la contabilidad nacional calculados a precios constantes? (38)

Nos servimos de la relación:

$$\text{Valor} = \text{cantidad} \times \text{precio o más bien } V = L(q) \times P(p).$$

De donde se deduce:

$$\text{Valor} = \text{Volumen} \times \text{variación de precio entre el año de base y el año observado.}$$

Así, se estima la variación de la producción del carbón, manteniendo artificialmente el precio del carbón en el nivel medio que tenía el año elegido como base, y se mide la variación de valor únicamente a la variación de volumen. Se identifica pues el volumen con el valor a precio constante.

La tabla siguiente (39) muestra cómo haciendo productos de índices de precios y de índices de volumen se llega a conocer los principales agregados de la contabilidad nacional a precios constantes o a precios corrientes.

TABLA 23

DISPERSION DE PRECIOS 1925-1974-1982

	1925 (francos antiguos)	1974 (francos nuevos)	1982 (francos nuevos)	indices elementales 1982 / 1925
Indice INSEE del costo de la vida				2,8
Salario horario total del obrero	2,12	8,73	28,08	13,2
Salario anual total del obrero ²	5 100	17 450	51 500	10,1
Oro (Napoleón) ³	80 (3)	260	632	7,9
Una hectárea de buena tierra en Beauce ⁸	6 000	20 000	37 000	6,2
Corte de pelo (hombre)	2,5 à 3	7 à 9	26,63	9,7
Localidad de cine de barrio	3	8	20	6,7
Billete de metro (2ª clase)	0,39	0,80	2,03	5,2
Bistec (1 kg)	18,47	30,78	66,35	3,6
Vino común (1 litro)	1,34	2,26	5,10	3,8
Guisantes	3,25	4,56	10,95	3,4
Leche (1 litro)	1,10	1,36	3,25	3,0
Camembert	3,80	3,81	8,50	2,2
Harina (1 kg)	2,27	2,27	4,43	2,0
Lápices Conté (la docena)	5,00	5,00	12	2,4
Merluza (1 kg)	6,38	5,96	16,05	2,5
Jamón de york (1 kg)	29,10	23,43	56,65	1,9
Mantequilla (1 kg)	18,54	13,52	26,20	1,4
Bicicleta ⁴	425	320	790	1,9
Huevos (la docena)	8,37	5,45	8,51	1,0
Confitura ⁵	3,20	4,50	9,34	2,9
KWH de electricidad ⁶	1,00	0,48	0,48	0,5
Bombilla eléctrica	17,50	2,10	4,10	0,3
Aparato de radio ⁷	2 700	300	169	0,1

(1) Fin de año

(2) 2.400 horas de trabajo en 1924

(2) 2.000 horas de trabajo en 1974 y 1983 horas en 1982

(3) Mercado libre (cotización oficial 20 F)

(4) La menos cara del catálogo Manufrance (La Redouts desde 1980)

(5) Pura fruta, puro azúcar, cerezas en 1925, albaricoques en 1974 y 1982

(6) Primer bloque en 1974, horas plenas en 1982

(7) En 1925, 5 lámparas GO-PO: en 1974 y 1982, GO-PO-FM

(8) Media en Eure et Loire. Fuente: Ministerio de Agricultura

TABLA 24

**FICHA DE EQUILIBRIO DE RECURSOS Y EMPLEOS
PARA UN PRODUCTO X**

	1978	Indice de volumen 79 / 78	1979 a precios de 78	Indice precios 79/78	1979 a precios de 79
Recursos					
Producción.....	900	110	990	105	1 040
Importación.....	100	105	105	100	105
Total	1 000		1 095		1 145
Empleos					
Consumos intermedios	340	107	365	107	389
Consumo de ahorros	400	110	440	103	453
Formación bruta de capital fijo:					
- De empresas(sociedades y empresas individuales)	60	105	63	105	66
- Ahorros (empresas individuales)	-	-	-	-	-
- Otros	-	-	-	-	-
Variación de Stocks.....	100	137	137	100	137
Exportaciones.....	100	90	90	111	100
Total	1 000		1 095		1 145

Quinto ejemplo:

5,80% menos.

Mi salario mensual ha pasado de 1980 a 1983 de 5.000 F a 6.500 F. ¿Ha habido elevación de mi poder de compra?

No hay respuesta única a esta pregunta.

1º La primera que se nos ocurre consiste en comparar el alza de mi salario con el índice de precios:

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{6\ 500}{5\ 000} = 1,30$$

Ya que el índice ha variado de $I_0 = 100$ a $I_1 = 138$ (índice de base 100 el año 1980).

Esto no significa que mi poder de compra haya disminuido de un 8% ($138 - 100$) sino que el salario de 5.000 F vale en francos constantes de 1983: $5.000 \times 138 = 6.900$ F.

Si mi salario es en 1983 de 6.500 F, gano 400 F menos en francos constantes que en 1981, es decir:

$$\frac{-400}{6\ 900} \times 100 = -5,80$$

Se puede escribir aún que el índice del poder de compra es:

$$\frac{S_1}{S_0} : \frac{I_1}{I_0} = \frac{130}{138} = 0,9420$$

lo que da el mismo resultado.

2º La verdadera respuesta sería calcular qué compras son posibles para mí hoy en día, cuáles lo eran en 1980 y compararlas. Pero la respuesta no es la misma si compro automóviles o aparatos de radio, bombillas eléctricas o guisantes. Mi poder de compra ha aumentado para algunos productos, se ha estancado o incluso ha disminuido para otros.

La práctica actual, que consiste en indexar los salarios sobre un índice, para mantener el poder de compra, es tranquilizadora para los asalariados, pero no es eficaz para el conjunto de la economía. En efecto, los productores, que deben pagar salarios más elevados, ven aumentar sus precios de coste y por consiguiente no pueden sino aumentar sus precios de venta. Entonces el índice sube, y de nuevo los salarios deben aumentar. Es una es-

piral inflacionista de la cual muchos países tratan de separarse pero no sin dificultades.

B. MEDIDA DEL VALOR DE COMpra

Los ejemplos que preceden, particularmente el del precio del 2 CV y el del poder de compra del salario, muestran que es difícil delimitar la evolución del valor de compra, incluso limitándose a un país y a una categoría particular de personas en este país.

Es claro que los índices calculados en la mayor parte de los países no están concebidos para responder a esta pregunta, aunque se les utilice a menudo, al menos a corto plazo, para ello. En efecto, ya se trate de índices de precios al consumo calculados son la ayuda de la fórmula de Laspeyres o en forma de cadena-Laspeyres, el presupuesto sobre el cual se determinan las ponderaciones cambia a menudo para adaptarse al consumo actual. En todos los países desarrollados, el consumo es fuertemente creciente y sobre todo ha crecido durante el periodo que ha seguido a la Segunda Guerra Mundial y ha durado hasta la primera crisis del petróleo (Les Trente Glorieuses).

Los índices reflejan este consumo creciente por sus ponderaciones. Es así, tal y como hemos visto, que el índice francés ha evolucionado aproximadamente como el precio del 2 CV desde 1948, mientras que es indiscutible que el poder de compra de los franceses en materia de automóviles ha aumentado mucho.

¿Qué se puede hacer entonces para medir la evolución del poder de compra?

- Primeramente, saber que esta medida no existe realmente. Lo que existe, es el poder de compra en automóviles, o en salchichón, o en cualquier otro producto. En general hay progresión del poder de compra en lo que se refiere a los productos del sector secundario, de gran progreso técnico, mientras que no lo hay, en lo que se refiere a los servicios.

- A continuación, para medir el poder de compra relativo de cada producto, el mejor método es el de los precios reales o precios salariales del que hemos hablado ya ampliamente. Decir que el precio del 2 CV en Francia ha pasado de 3.088 salarios horarios obreros a 908 entre 1949 y 1983, es enunciar una realidad clara, el poder de compra del obrero francés que desea comprar un 2 CV se ha multiplicado más que por tres... Este análisis es útil, pero no hay que perder de vista, que al mismo tiempo, el mismo obrero, paga aproximadamente un salario horario para hacerse cortar el pelo: En este terreno, su poder de compra no ha progresado. La realidad está hecha de una multitud de evoluciones de precios reales, algunos de los cuales han bajado - a menudo mucho - mientras que otros se han estancado. (Solamente de modo muy excepcional el precio real aumenta, y en general durante un periodo corto).

- Si se intenta a toda costa medir la evolución del poder de compra por una sola cifra, la solución menos mala sería probablemente un índice de Laspeyres del cual no se cambiase la base (40). Pero nos encontramos entonces con dificultades de las que hemos hablado ya: cambio de calidad, cambio de producto, desaparición de algunos, aparición de otros, ...

CONCLUSION

Al final de este trabajo, se deben recordar dos principios: la necesidad de los cálculos de índices y su relatividad. El cálculo de los índices sintéticos es una necesidad en muchos campos de la ciencia; pero este cálculo es difícil, y no da los resultados infalibles que desearía encontrar el neófito.

En 1914, W.C. Mitchell escribia: [Se emplean índices] para mostrar la depreciación de la moneda, el alza del costo de la vida, las alternancias de prosperidad y de depresión en los efectivos, las correcciones que hay que aportar a las comparaciones de la fortuna nacional o de ingresos privados en diversas épocas; se los cita para demostrar que los salarios deben ser aumentados, disminuidos, que los trusts han manipulado los precios de sus productos para bien o para detrimento del público, que las tarifas aduaneras han sido favorables o desfavorables a los productores o a los consumidores, que la emigración debe ser animada o restringida, que el sistema monetario debe ser reformado; que los recursos naturales han disminuido ya, o que el dividendo natural está en aumento. Se recurre a ello para explicar por qué los valores han bajado y por qué las tasas de interés han aumentado, por qué los gastos públicos están en aumento, por qué el malestar social prevalece en ciertos años, por qué la agricultura es próspera o por el contrario, el paro varía, por qué el oro se importa o se exporta, etc... (41). Esta descripción debería ser completada ahora por los mil otros usos que se hace de los índices en el momento actual. Basta, para comprender su importancia, reflexionar las consecuencias de las variaciones de un índice sobre los salarios, los ingresos indexados, etc. Fuera de la ciencia económica, se plantean problemas análogos igualmente en demografía, en biología y generalmente en todos los campos en los que se debe recurrir a síntesis estadísticas.

Sin embargo el peligro contra el cual importa reaccionar consiste más bien en la exageración del sentimiento de confianza que predomina, dadas la perfección del material y el cuidado con el cual los métodos son discutidos y elegidos (42).

La confianza que el gran público concede en el momento actual a cualquier índice está ciertamente en peligro, pues consiste en considerar como absoluto un resultado que no tiene más que un valor relativo.

Importa saber que si se hubiera tomado otro método de cálculo, hubiera obtenido en general un resultado diferente.

Las reflexiones que preceden podrían invitar a una condena de todos los índices sintéticos de precios. Sin embargo, hay que reconocer que es imposible en el momento actual prescindir de ello. El espíritu humano es incapaz de ver las variaciones de todos los precios a la vez; hay que resumir estas variaciones de una manera o de otra en un índice sintético.

Por lo tanto, hay que hacer uso de los índices, pero sin perder de vista que no son perfectos. En su *Traité de Statistique*, Huber dice que el radio de un círculo es más fácil de abarcar que la superficie de ese círculo, ya que hay una relación que es siempre la misma entre el radio del círculo y su superficie, el radio puede ser considerado como mejor que un índice de superficie; por lo menos, es un índice perfecto. "En materia económica, estamos siempre en la incertidumbre indicaria; hay siempre una desviación, un hiato entre el concepto y la medida, y la correspondencia entre el concepto y la medida sigue siendo siempre la gran dificultad de nuestras investigaciones económicas" (43).

Un índice sintético tiende a resumir en una sola cantidad series elementales; todo lo que se puede exigir es que dé una imagen aceptable del orden de magnitud de los efectos que los elementos que intervienen en él ejercen sobre un fenómeno definido.

No hay que extrañarse si los índices sintéticos de una misma población de series elementales son

numerosos, mientras que el espíritu humano tiene tendencia a imaginar que no debería haber más que uno. De hecho, existen otros índices que el estadístico quiere construir; y cada uno tiene la significación que resulta de su cálculo mismo. Entre todos estos índices, el economista debería poder escoger el que le corresponda mejor al estudio que vaya a hacer.

La dificultad es que la mayor parte de los usuarios razonan para los índices como para los termómetros: "importa poco, en realidad, la elección del termómetro, lo esencial es que esté bien construida, que sea suficientemente preciso, y que no se cambie el curso del experimento" (44) ¡De hecho, una realidad económica no es medible de manera tan precisa como una temperatura! Importa que todos los usuarios de índices tengan la convicción de esta "incertidumbre indiciaaria".

Por consiguiente, una medida elemental de prudencia respecto de estos índices sería no considerar sus variaciones más que si son suficientemente importantes. "Un cambio de presión de algunos milímetros no son tomados en consideración por el paseante que consulta el barómetro: un cambio de algunos puntos tiene menos significado aún en este barómetro económico, a veces construido de forma bastante somera, como son los números índices" (45).

Sobre todo, importa que el método de cálculo sea siempre publicado al mismo tiempo que el índice sintético mismo y que los utilizadores lean y comprendan esta nota, verdadero "instrucciones de uso". "La causa principal de las dificultades de interpretación vienen de que un índice general de precios puede plantearse de diversos puntos de vista y que, según el modo de establecimiento del índice, este puede adaptarse más o menos bien a la finalidad que se le propone. De ello resulta que es absolutamente indispensable cuando se quiere utilizar un índice conocer exactamente el método según el cual ha sido construido, permitiendo este conocimiento únicamente juzgar cuál puede ser el valor significativo del índice, dentro de qué límite se debe restringir las conclusiones que permite formular" (46).

La elección de la fórmula depende pues del uso que se quiere hacer del índice. Hay que indicar siempre cuál es esta fórmula, y no perder nunca de vista que no es universal. En muchos casos, el único método correcto es referirse a varias fórmulas de índices sintéticos, que permitirán conocer entre qué límites se encuentra la realidad que se quiere comprender.

Habría que profundizar también en la noción de **error** en estadística, de manera que seamos capaces de indicar el grado de aproximación de cada cifra publicada ... Esto siempre, suponiendo que la realidad que se trata de aprehender es medible ¡lo que está por ver!

Las ideas fuerza que hubiéramos querido transmitir en este curso son las siguientes:

- El índice no tiene siempre todo el poder de información que se desearía encontrar en él.
- No existe medio infalible de conocer el aumento del "Costo de la vida" o el de la producción industrial. Todo resultado es relativo: con los mismos datos, ¡se pueden mantener tasas de crecimiento diferentes según la fórmula de cálculo elegida y, desde luego, la elección de datos tiene igualmente consecuencias sobre el índice!
- Sin embargo los índices sintéticos representan aún la mejor manera conocida de resumir datos numerosos.

NOTAS

- (1).- Etudes et Conjonctures, nº 4, INSEE, Paris, abril 1960, p. 304. Todo este número está consagrado a las "variaciones estacionales de la actividad económica".
- (2).- Cero es un índice en el sentido II 1º del Petit Robert; igualmente.
- (3).- El único inconveniente de este método es la pérdida de precisión, pues habría que guardar muchos decimales en el índice de base 1960 para deducir de él un índice de base 1979 exacto con una precisión suficiente. Por otra parte si se ha cometido un error de cálculo, en el cálculo de índice base de 1960, este error se vuelve a encontrar en el índice de base de 1979. Por este motivo se aconseja volver lo más a menudo posible de los datos brutos.
- (4).- A. JULIN, Principes de statistique théorique et appliquée, t. II. Paris y Bruxelles, 1923.
- (5).- Distinguimos las palabras base y origen, cf. aquí abajo.
- (6).- M.G. PIERSON, "Further consideration on index numbers", Economic Journal, marzo 1896, p. 127-132.
- (7).- L. MARCH, "L'étude statistique du mouvement général des affaires". Journal de la Société de Statistique de París, julio-septiembre 1923, p. 251-281.
- (8).- J. LEJEUNE, Les méthodes de construction des index-Numbers, Paris 1935.
- (9).- Los números índices de la variación de precios, París, 1927, p. 131.
- (10).- L'indice monétaire et la théorie de la monnaie, París, 1926, p. 12 à 18.
- (11).- Para el pan $((23 \times 0,62)/67,5) \times 100 = 21,1$ (peso 23 kg multiplicado por el precio del pan en 1960, 0,62 F, dividido por la suma de los productos cantidades por precios en 1960:67,5). Se hallan igualmente los otros coeficientes de ponderación.
- (12).- D'après M.P. MOUCHEZ, Les indices de Prix, Cujas, París, 1961, p. 56.
- (13).- Voir Jacqueline FOURASTIE, Les formules d'indices de prix. Armand Colin, París, 1966, p. 123.
- (14).- J.P. PIRIOU, L'indice des prix. La Découverte Maspéro, París, 1983, p. 14
- (15).- "The making and using of index numbers", Bulletin of U.S. Bureau of Labor Statistics, 2º edición, octubre 1921, nº 284, p. 40.
- (16).- M. VACHER, Statistiques économiques et sociales. Cours de l'I.S.U.P., I.N.S.E.E., 1960, p. 60.
- (17).- E. MORICE et F. CHARTIER. Méthode statistique, 1954, tome 1, p. 170.
- (18).- Voir Jacqueline FOURASTIE, les formules d'indices de prix 1966 p. 141. En la 3ª parte de este curso se presenta una tabla más detallada de estos resultados. (Tabla 20).
- (19).- Cf. Jacqueline FOURASTIE, Les formules d'indices de prix. Armand Colin, París, 1966, p. 150 à 162.
- (20).- Sobre esta teoría y sobre el índice "verdadero del costo de la vida", ver los índices de precios de M.P. MOUCHEZ, París, Cujas, 1961, p. 29-39 y N.T. Jazairi, The present state of the theory and Practice of index numbers, contribución invitada a la sesión 44 del Instituto Internacional de Estadística, Madrid 1983. Utilizamos este último artículo en la continuación de este párrafo. Ver también J.P. PIRIOU. El índice de precios, París, la Découverte/Maspéro. 1983, p. 101.
- (21).- Salem H. Khamis. "Application of index numbers in international comparaisons and related concepts", Contribución invitada a la 44 sesión del Instituto Internacional de Estadística, Madrid, 1983.
- (22).- Cf. Michel Lévy. L'information statistique, París, Seuil, 1975.
- (23).- R.C. Geary, "A note on the comparison of Exchange Rates and Purchasing Power between Country", Journal of Royal Statistical Society, 1958, A., Vol. 121, p. 97.
- (24).- Cf. R.C. Geary y Salem H. Khamis, op. cit. ci-dessus.
- (25).- Jean FOURASTIE. Le Grand Espoir du XX^e siècle, col. "Idées", Paris Gallimard (1º edición, P.U.F., París, 1949) et Productivité, Prix et Salaires, Paris, O.C.D.E., 1957 (editado simultáneamente en inglés).
- (26).- Cf. Jean et Jacqueline FOURASTIE. Pouvoir d'achat, Prix et Salaires. París, Gallimard (col. "Idées"), 1949) et les trabajos anteriores de Jean FOURASTIE. Jean FOURASTIE y Béatrice Bazil, Pourquoi les prix baissent, Hachette, (col. "pluriel"), 1984.
- (27).- Según M. Lévy. L'information statistique. Seuil, París, 1975, p. 145.
- (28).- Cf. André L.A. Vincent. La mesure de la productivité, Dunod, París, 1968.
- (29).- 1977 Supplement to the Statistical Yearbook and the Monthly Bulletin of Statistics, (Methodology and Definitions), United Nations.
- (30).- Jacqueline FOURASTIE, Les formules d'indices de Prix, Armand Colin, París, 1966.
- (31).- Fuente: Remy ALASSEUR, Jacqueline FOURASTIE, Jean GUILHEM, bajo la dirección de Jean FOURASTIE, Documents pour l'élaboration d'indices du coût de la vie en France de 1919 à 1965, Mouton, París, La Haye, 1970.
- (32).- Los estadísticos de todos los países indican, en obras metodológicas, cómo elaboran sus índices. Señalemós, en Francia:

- INSEE, Pour comprendre l'indice des prix, Imprimerie Nationale, Paris 1977; J.P. Piriou ha vulgarizado un estudio crítico de la metodología, L'indice des prix, La Découverte/Maspero, Paris, 1983. Numerosas investigaciones se refieren a estas cuestiones. Señalemos una de las últimas en el plano internacional: J.L. NORWOOD, "Problems in Measurement of Consumer prices", Institut International de Statistique, Madrid, 1983, (Comunicación invitada).
- (33).- Maurice Olivier, les nombres indices de la variation des prix, Paris, 1927.
- (34).- The quality of Statistical Data, comunicación invitada a la 44 sesión del Instituto Internacional de Estadística, Madrid, 1983. Cita entre otros: W.E. DEMING, Some theory of Sampling, John Wiley and Sons, NEW YORK, 1950 y C. EISENHART "Realistic Evaluation of the Precision and Accuracy of instrument Calibration Systems", Journal of Research of the National Bureau of Standards, Engineering and Instrumentation, vol. 67, C, nº 2, abril-junio 1963, p. 161-187; Cf. también O. MORGENSTERN, precision et incertitude des données économiques, Dunod, Paris, 1972 y Jacqueline Fourastié. Essai sur la mesure des quantités économiques, Mouton, Paris, La Haya, 1972.
- (35).- La tabla de salarios figura en Jean y Jacqueline Fourastié, Pouvoir d'achat, prix et Salaires, col. "Idées", Gallimard, Paris, 1977, p. 66. Se tiene al día en el laboratorio de econometría del conservatorio nacional de artes y oficios, Paris.
- (36).- Cuando otras personas que no son obreros, participan en la fabricación, su tiempo se cuenta en "equivalente obrero"; así un ingeniero que trabaja una hora en la concepción o en la inspección del 2 CV y que haya sido pagado doble que el obrero, verá su tiempo contado como 2 horas.
- (37).- Esta tabla, aparecida en Jean y Jacqueline Fourastié, Pouvoir d'achat, prix et Salaires y puesta al día en el laboratorio de Econometría del CNAM, aparece en las Tableaux de l'Economie Française de l'INSEE.
- (38).- Según Système Élargi de comptabilité nationales, collection de l'INSEE, nº 44-45, mayo 1976.
- (39).- Extracto de B. Brunhes, Présentation de la comptabilité nationale française. Collection del INSEE, nº 51, diciembre 76, reeditado por editorial Dunod, Colección "Modules Economiques". Paris.
- (40).- Se ha hecho una tentativa, a largo plazo, en Francia: Rémy ALASSEUR, Jacqueline FOURASTIE, Jean GUILHEM, bajo la dirección de Jean Fourastié: Documents pour l'élaboration d'indices du coût de la vie en France de 1918 à 1965, Mouton, Paris, La Haya, 1970.
- (41).- W.C. MITCHELL, "The making and using of index numbers", Bulletin du Bureau of Labor Statistics, nº 173, p. 25-26, citado por M. OLIVIER, Les nombres indices de la variation des prix.
- (42).- Julin, Principes de Statistique théorique et appliquée, t. II, p. 114.
- (43).- H. GUITTON, Statistique et Econométrie, Dalloz, Paris, p. 48-49.
- (44).- F. DIVISIA, L'indice monétaire et la théorie de la monnaie, Sirey, 1926.
- (45).- JULIN, Principes de statistique théorique et appliquée, tome II, p. 172.
- (46).- DUKE DE BERNONVILLE, "Les indices du mouvement général des prix", Journal de la Société de Statistique de Paris, mayo 1924, p. 182.